$1^{\underline{a}}$ PROVA DE CÁLCULO III - IMEUSP - MAT211

16 de abril, 2018

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens
BOA SORTE!

1. As três equações
$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 & = 2 \\ xy - (\sin u)(\cos v) + z & = 0\,, \end{cases}$$
definem x, y e z, como funções de u e v. Calcule as derivadas parciais
$$\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial v}$$
no ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, $z = 0$.

Solução.

Convenção: às vezes escrevemos vetores em formato linha e às vezes em coluna.

- $\diamond$ Verifique que o ponto dado satisfaz o sistema dado.
- $\diamond$ Introduzamos notações. Seja $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$F\begin{pmatrix} u \\ v \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y\cos(uv) + z^2 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 \\ xy - (\sin u)(\cos v) + z \end{pmatrix}.$$
Consideremos o ponto
$$(u, v, x, y, z) = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 1, 1, 0\right).$$
Sejam $X = (x, y, z)$ e $U = (u, v)$. Devido às hipóteses, em uma vizinhança (no plano $\mathbb{R}^2$) do ponto
$$U = (u, v) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$
temos $X = X(U)$. Isto é, podemos escrever
$$X = X(U) = X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$
tal que
$$F(U, X(U)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\diamond$ Computemos a matriz jacobiana de F.

Diferenciando as três funções coordenadas da função $F = (F_1, F_2, F_3)$ em relação às variáveis $u, v, x, y,$ e z encontramos

$$JF(u,v,x,y,z) = \begin{pmatrix} vy\sin(uv) & uy\sin uv & 2x & -\cos(uv) & 2z \\ -v\cos(uv) & -u\cos(uv) & 2x & 2y & 4z \\ -(\cos u)(\cos v) & (\sin u)\sin v) & y & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Separando as derivadas em relação a $U = (u, v)$ e a $X = (x, y, z)$, segue

$$JF\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} & \vdots & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial U} \,\Big|\, \frac{\partial F}{\partial X} \right).$$

Atenção. *Sabemos que localmente temos*

$$F(U, X(U)) = constante.$$

Diferenciando segue

$$\boxed{\tfrac{\partial F}{\partial U} + \tfrac{\partial F}{\partial X}\tfrac{\partial X}{\partial U} = 0.}$$

Donde obtemos a fórmula (equivalente a dada no teorema da função implícita)

$$\frac{\partial X}{\partial U} = -\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial U}.$$

Graças à fórmula destacada encontramos

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donde segue

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resposta.

$$\boxed{\tfrac{\partial x}{\partial u}\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = 0 \ \text{ e } \ \tfrac{\partial x}{\partial v}\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \tfrac{\pi}{12}\ \clubsuit}$$

2. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, onde $(x, y, z) \in \mathbb{R}$, e as restrições

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{e} \quad x + y - z = 0.$$

⋄ Notemos que $-2 \leq x \leq 2$.

(a) Existem o máximo e o mínimo de f sujeita a tais restrições? Justifique.

(b) Determine, se existirem, tais pontos de máximo e mínimo e seus valores.

Solução.

(a) A função f é contínua. As restrições descrevem um conjunto K dado pela intersecção entre um elipsóide centrado na origem e um plano passando pela origem. Logo, K é um compacto (uma elipse). Pelo Teorema de Weierstrass segue que f assume máximo e mínimo em K. Tal mínimo/máximo corresponde ao quadrado da distância até à origem do ponto de K mais próximo/distante da origem.

(b) Pelo método dos multiplicadores de Lagrange encontramos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & y & z \\ \frac{x}{2} & \frac{2y}{9} & \frac{2z}{25} \end{vmatrix} = 0.$$

Donde segue

$$\left(\frac{2}{25} - \frac{2}{9}\right) yz - \left(\frac{2}{25} - \frac{1}{2}\right) xz - \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2}\right) xy = 0.$$

Temos então

$$-\frac{32yz}{225} + \frac{21xz}{50} + \frac{5xy}{18} = 0.$$

Multiplicando por 450 encontramos

$$-64yz + 189xz + 75xy = 0.$$

Substituindo $z = x + y$ nesta equação encontramos

$$189x^2 - 64y^2 + (-64xy + 189xy + 75xy) = 0.$$

Logo,

$$xy = \frac{64y^2 - 189x^2}{198}.$$

Multipliquemos a equação da elipse por 900. Segue

$$225x^2 + 100y^2 + 36z^2 = 900.$$

A seguir, substituindo $z = x + y$ e o valor acima encontrado para xy na equação da elipse encontramos

$$\begin{aligned} 900 &= 225x^2 + 100y^2 + 36\left(x^2 + y^2 + \frac{64y^2 - 189x^2}{99}\right) \\ &= 225x^2 + 100y^2 + 36\left(-\frac{90}{99}\right)x^2 + 36\left(\frac{163}{99}\right)y^2 \\ &= 225x^2 + 100y^2 - \frac{360}{11}x^2 + \frac{652}{11}y^2 \\ &= \frac{2115}{11}x^2 + \frac{1752}{11}y^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$y^2 = \frac{9900 - 2115x^2}{1752}$$

e portanto

$$y = \pm\sqrt{\frac{9900 - 2115x^2}{1752}}, \text{ onde } x^2 \leq \frac{9900}{2115} = \frac{1100}{235} = \frac{220}{47}.$$

Substituindo $z = x + y$ e o valor acima encontrado para y na função em questão $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
F(x) &= x^2 + y^2 + z^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2xy \\
&= 2x^2 + \frac{9900 - 2115x^2}{876} + \frac{64y^2 - 189x^2}{99} \\
&= \left(2 - \frac{2115}{876} - \frac{189}{99}\right) x^2 + \frac{64}{99}\left(\frac{9900 - 2115x^2}{1752}\right) + \frac{9900}{876} \\
&= \left(2 - \frac{705}{292} - \frac{21}{11} - \frac{1966}{11 \times 219}\right) x^2 + \frac{32 \times 100}{876} + \frac{9900}{876} \\
&= \frac{1.406.856 - 1.698.345 - 1.342.908 - 573.672}{703428} x^2 + \frac{13100}{876} \\
&= \frac{2.208.069}{703428} + \frac{13100}{876} x^2.
\end{aligned}$$

Para achar o máximo e o mínimo de F [recordemos que $-2 \leq x \leq 2$], utilizando Cálculo I segue que basta compararmos

$$F(0), F(2) = F(-2) \text{ e } F(x_0) \text{ onde } F'(x_0) = 0 \clubsuit$$

3. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x,y) = y^2 - x^2$ restrita ao disco compacto
$$K = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\Big\}.$$

Solução.

- $\diamond$ A função $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua e K é compacto. Então, pelo teorema de Weierstrass, f assume valor mínimo e valor máximo, ambos em K.
- $\diamond$ Consideremos $(x,y) \in K$.
  É claro temos $0 \leq y^2 \leq 4$ e $0 \leq x^2 \leq 4$. Seguem $-4 \leq -x^2 \leq 0$ e
  $$-4 \leq y^2 - x^2 \leq 4.$$
- $\diamond$ Ocorre $y^2 - x^2 = 4$ se e somente se $y = \pm 2$ e $x = 0$. Assim
  $$\begin{cases} \text{o valor máximo global de } f \text{ em } K \text{ é } 4 \\ \text{e} \\ \text{os pontos de máximo globais são } (0,-2) \text{ e } (0,2). \end{cases}$$
- $\diamond$ Ocorre $y^2 - x^2 = -4$ se e somente se $y = 0$ e $x = \pm 2$. Assim
  $$\begin{cases} \text{o valor mínimo global de } f \text{ em } K \text{ é } -4 \\ \text{e} \\ \text{os pontos de mínimo globais são } (-2,-0) \text{ e } (2,0). \end{cases}$$
- $\diamond$ Os pontos críticos de f satisfazem $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y) = (0,0)$.
  Logo, o único ponto crítico é a origem
  $$(0,0), \text{ com } f(0,0) = 0.$$
  No eixo Ox temos $f(x,0) = -x^2 \leq 0 = f(0,0)$. No eixo Oy temos $f(0,y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$. Portanto, a origem $(0,0)$ não é um ponto de mínimo local e nem um ponto de máximo local.

  Segue que $(0,0)$ é um ponto de sela.

  Segue também que f não tem ponto de mínimo local nem ponto de máximo local♣

4. Considere o campo vetorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j} = \frac{-y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}\ ,\ (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Compute as derivadas parciais

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \ \text{ e } \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \text{ ambas para } (x,y) \neq (0,0).$$

Vale a igualdade destas derivadas parciais?

(b) Compute a integral

$$\int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt, \text{ onde } \gamma(t) = (\cos t\, , \sin t), t \in [0, 2\pi].$$

(c) Defina um campo conservativo.

(d) O campo $\overrightarrow{F}$ é conservativo ? Por quê?

Solução.

(a) Temos

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)-y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \text{e} \\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases}$$

Donde segue a igualdade das derivadas parciais $P_y = P_x$.

(b) Temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)]dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1.dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

(c) Um campo vetorial $\overrightarrow{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, com Ω aberto em $\mathbb{R}^2$, é conservativo se existe um campo escalar diferenciável $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{\nabla}\varphi(x,y) = \overrightarrow{F}(x,y) \text{ para todo } (x,y) \in \Omega.$$

(d) Não. Pois, se $\overrightarrow{F}$ é conservativo então existe φ como em (c) e assim

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \overrightarrow{\nabla}\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\{\varphi \circ \gamma\}(t)dt \\ &= \{\varphi \circ \gamma)\}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \varphi(\gamma(2\pi)) - \varphi(\gamma(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Já vimos que tal integral é 2π. Logo, $\overrightarrow{F}$ é não conservativo♣