

PROVA SUBSTITUTIVA DE CÁLCULO III - IMEUSP - MAT211

6 de julho de 2018

Nome : \_\_\_\_\_  
N<sup>o</sup>USP : \_\_\_\_\_  
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Escolha 4 questões entre as 5 questões.  
Justifique toda passagem. Enuncie teoremas utilizados. Defina a terminologia usada.  
BOA SORTE!

1. (a) Enuncie o teorema da função inversa. Defina a terminologia utilizada.

A seguir, considere a função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por,

$$F(x, y) = (u, v) \text{ com } (u, v) = (x^4y + x, x + y^3).$$

- (b) Mostre que  $F$  é inversível em uma vizinhança do ponto  $(1, 1)$  [isto é, em um aberto que contém o ponto  $(1, 1)$ ] e que sua função inversa  $G$  é de classe  $C^1$  em uma vizinhança do ponto  $F(1, 1) = (u_0, v_0)$ . Determine  $(u_0, v_0)$ .
- (c) Determine  $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0)$ .

2. (a) Enuncie o teorema dos multiplicadores de Lagrange apropriado ao problema que segue. Defina a terminologia utilizada.
- (b) Ache os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 .$$

3. (a) Esboce o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}.$$

(b) Calcule o volume de  $B$ .

(c) Enuncie os teoremas utilizados em (b) e defina terminologia usada para resolver (b).

4. Seja  $\sigma$  o gráfico de

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \text{ com } x^2 + y^2 \leq 1,$$

e  $\vec{n}$  a normal unitária a  $\sigma$ , supondo  $\vec{n}$  com terceira componente  $\leq 0$ . Seja

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2y \vec{i} - xy^2 \vec{j} + \vec{k}.$$

(a) Esboce a superfície (com o vetor normal).

(b) Calcule

$$\iint_{\sigma} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS.$$

(c) Enuncie o teorema utilizado em (b). Defina a terminologia empregada.

5. Seja

$$\vec{F}(x, y, z) = x^3 \vec{k}$$

e  $\sigma$  a superfície

$$z = y + 4, \quad \text{com} \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$$

e normal unitária  $\vec{n}$  apontando para baixo.

(a) Esboce a superfície (com o vetor normal).

(b) Calcule

$$\iint_{\sigma} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle dS.$$

(c) Enuncie o teorema utilizado em (b). Defina a terminologia empregada.