$3^{\underline{a}}$ PROVA DE CÁLCULO III - IMEUSP - MAT211

4 de julho de 2018

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra	
Total	

Nome : ____
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Escolha 4 entre as 5 primeiras questões. A questão extra é livre e vale 1 ponto.
Justifique todas as passagens. Enuncie teoremas utilizados. Desenhe figuras apropriadas.
BOA SORTE!

1. Siga as instruções.

   (a) Enuncie o teorema da divergência no plano e defina a terminologia utilizada.

   (b) Considere

$$\overrightarrow{F}(x,y) = x^3y^3\overrightarrow{i} + \left(3y - \frac{3}{4}x^2y^4\right)\overrightarrow{j} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \\ \text{com } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   Calcule

$$\int_\gamma \left\langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} \right\rangle ds,$$

   com $\overrightarrow{n}$ a normal de componente $y \geq 0$ (i.e., a segunda componente do vetor normal é não negativa).

   Dica. Considere um compacto K conveniente e esboce-o. A seguir, aplique o teorema da divergência no plano.

2. Prove uma fórmula para a área da superfície

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

onde $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ são constantes.

3. Calcule

$$\iint\limits_{\sigma} \left\langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} \right\rangle dS,$$

sendo

$$\overrightarrow{F} = 3xy\,\overrightarrow{i} - \frac{3}{2}y^2\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}.$$

e σ a fronteira de

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2\}$$

com normal unitária exterior $\overrightarrow{n}$.

Enuncie teoremas utilizados e defina a terminologia empregada.

4. Siga as instruções.

(a) Enuncie o Teorema de Stokes no espaço e defina a terminologia utilizada.

(b) Calcule

$$\iint_{\sigma} \left\langle \operatorname{rot} \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} \right\rangle dS,$$

onde

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = y \overrightarrow{i} + x \overrightarrow{j} + xz \overrightarrow{k}$$

e σ é a superfície

$$z = x + y + 2 \quad \text{e} \quad x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,$$

sendo $\overrightarrow{n}$ a normal unitária que aponta para baixo.

5. Calcule

$$\iint_{\sigma} \left\langle \overrightarrow{F}, \overrightarrow{n} \right\rangle dS,$$

sendo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{i} + yz\,\overrightarrow{j} + z^2\,\overrightarrow{k}$$

e σ a fronteira de

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x \text{ e } 0 \leq z \leq 4\},$$

com normal unitária exterior $\overrightarrow{n}$.

Enuncie teoremas utilizados e defina a terminologia empregada.

Extra. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável arbitrária. Escrevamos

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação

> *"Existe um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo*
>
> $$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = JF(a,b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
>
> *onde* $JF(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$*."*

Isto é, prove-a ou dê um contra-exemplo.