$2^{\underline{a}}$ PROVA DE CÁLCULO III - MAT211 - IMEUSP

25 de maio de 2018

Q	N
1	
2	
3	
4	
Extra 1	
Extra 2	
Total	

Nome : ____
$N^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

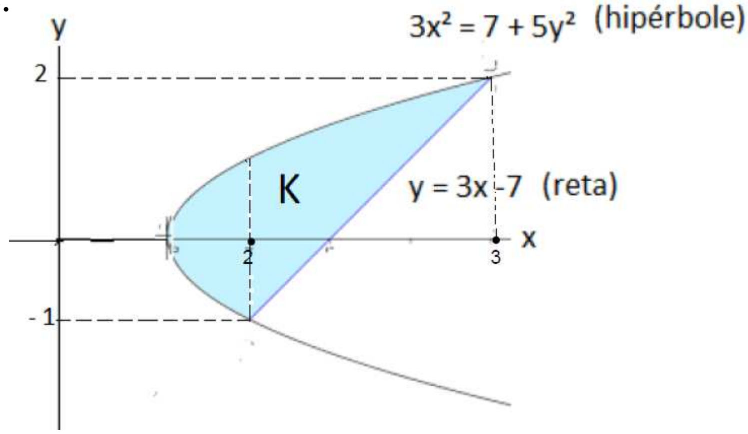
Justifique todas as passagens. Enuncie resultados utilizados.
BOA SORTE!

1. (a) Enuncie o teorema de Fubini no plano. Defina a terminologia empregada.

   (b) Inverta a ordem de integração na integral abaixo. Faça um esboço.

$$\int_{-1}^{2}\left[\int_{\sqrt{\frac{7+5y^2}{3}}}^{\frac{y+7}{3}} f(x,y)dx\right]dy.$$

Solução.



Temos

$$\int_{-1}^{2}\left[\int_{\sqrt{\frac{7+5y^2}{3}}}^{\frac{y+7}{3}} f(x,y)dx\right]dy = \int_{\sqrt{\frac{7}{3}}}^{2}\left[\int_{-\sqrt{\frac{3x^2-7}{5}}}^{\sqrt{\frac{3x^2-7}{5}}} f(x,y)dy\right]dx$$

$$+ \int_{2}^{3}\left[\int_{3x-7}^{\sqrt{\frac{3x^2-7}{5}}} f(x,y)dy\right]dx \clubsuit$$

2. (a) Enuncie o teorema de mudança de variável para integral dupla. Defina a terminologia empregada.

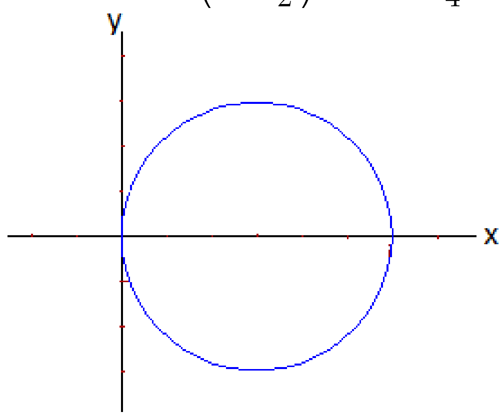
   (b) Calcule a integral abaixo (com ou sem o teorema acima). Faça um esboço.

$$\iint_B x\,dx\,dy, \text{ com } B \text{ o círculo } x^2+y^2-x \le 0.$$

Solução.

◇ Notemos que o círculo dado é

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \le \frac{1}{4}.$$



Com as coordenadas polares

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2} = \rho\cos\theta \\ y = \rho\text{sen}\theta \end{cases}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\iint_B x\,dx\,dy &= \iint_{\left[0,\frac{1}{2}\right]\times[0,2\pi]} \left(\frac{1}{2}+\rho\cos\theta\right)\rho\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho}{2}+\rho^2\cos\theta\right)d\theta\right]d\rho \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \rho\pi\,d\rho \\
&= \pi\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\pi}{8} \clubsuit
\end{aligned}$$

3. (a) Enuncie o teorema de mudança de variável para integral tripla. Defina a terminologia empregada.

   (b) Calcule o volume do conjunto K (com ou sem o teorema acima). Faça um esboço.

$$K = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4x + 2y\Big\}.$$

Solução.

◇ Por definição, o volume V é

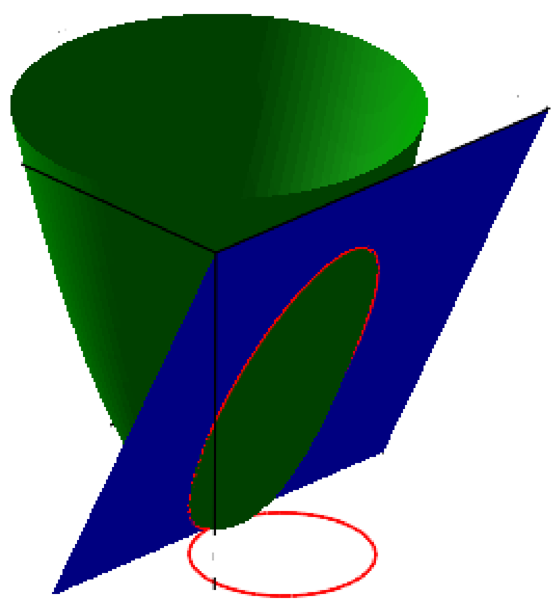
$$V = \iiint_K 1\, dx\, dy\, dz.$$

◇ A projeção de K sobre o plano Oxy é dada por

$$x^2 + y^2 \leq 4x + 2y.$$

Obtemos então , no plano Oxy, (cheque) o círculo C dado por

$$C : (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 5.$$



◇ Segue então

$$\begin{aligned} V &= \iint_C \int_{x^2+y^2}^{4x+2y} dz dx\, dy \\ &= \iint_C (4x + 2y - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \iint_C [5 - (x-2)^2 - (y-1)^2] dx\, dy. \end{aligned}$$

$\diamond$ Utilizando coordenadas polares escrevamos

$$\begin{cases} x - 2 = \rho\cos\theta \\ y - 1 = \rho\text{sen}\theta. \end{cases}$$

Encontramos então a integral dupla

$$V = \int\int_{[0,\sqrt{5}]\times[0,2\pi]} (5 - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\text{sen}^2\theta)\rho\, d\rho\, d\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}(5\rho - \rho^3)d\theta\, d\rho \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{5}}(5\rho - \rho^3)d\rho \\ &= 2\pi\left(\frac{5\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{5}} \\ &= 2\pi\left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4}\right) \\ &= \pi\left(25 - \frac{25}{2}\right) \\ &= \frac{25\pi}{2} \clubsuit \end{aligned}$$

4. Calcule

$$\int_\gamma 2y dx + z dy + x dz\,,$$

onde γ é a intersecção das superfícies [em $\mathbb{R}^3$]

$$x^2 + 4y^2 = 1 \text{ e } x^2 + z^2 = 1, \text{ com } y \geq 0 \text{ e } z \geq 0,$$

sendo o sentido de percurso do ponto $(1, 0, 0)$ para o ponto $(-1, 0, 0)$. Faça um esboço das superfícies e da intersecção.

Solução.

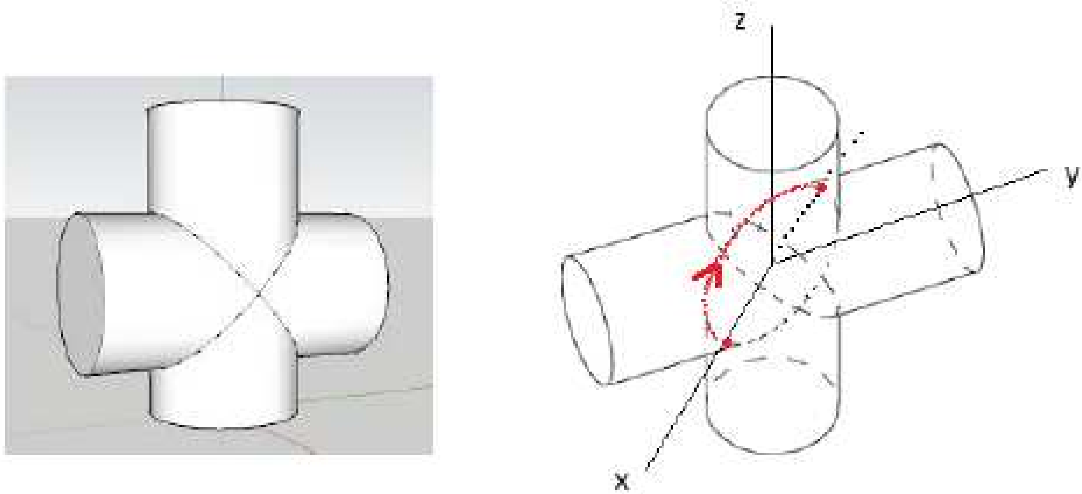


Figura 1: À esquerda, uma intersecção de dois cilindros. À direita, a curva γ.

◇ Parametrizando a curva γ no parâmetro $x = t$ encontramos (cheque)

$$\gamma(t) = \left(-t, \frac{\sqrt{1-t^2}}{2}, \sqrt{1-t^2}\right), \text{ onde } t \in [-1, 1].$$

◇ Temos então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma 2y dx \quad &+ \quad z dy + x dz \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\sqrt{1-t^2}(-1) + \sqrt{1-t^2}\left(\frac{-t}{2\sqrt{1-t^2}}\right) + (-t)\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right] dt \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-\sqrt{1-t^2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= -\frac{\pi}{2} - 0 + \int_{-1}^{1} \frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= -\frac{\pi}{2} + \int_{-1}^{1} (-\sqrt{1-t^2})\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin t\Big|_{t=-1}^{t=1} \\
&= -\pi + \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= -\pi + \pi \\
&= 0 \clubsuit
\end{aligned}
$$

Extra 1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável arbitrária. Escrevamos

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Decida se é verdadeira ou falsa a afirmação

> *"Existe um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo*
>
> $$F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = JF(a, b)F\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
>
> *onde* $JF(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}$."

Isto é, prove-a ou dê um contra-exemplo.

Extra 2. Sejam $B(0;1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e uma função diferenciável

$$F : B(0;1) \to \mathbb{R}^2, \quad \text{com } F(x,y) = (f(x,y), g(x,y)).$$

Suponha que para quaisquer pontos

$$(x_1, y_1) \in B(0;1),\ (x_2, y_2) \in B(0;1),\ (x_3, y_3) \in B(0;1) \ \text{ e } \ (x_4, y_4) \in B(0;1),$$

temos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y_2) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_3, y_3) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_4, y_4) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Mostre que F é uma função injetora.