MAT 211 - Cálculo III - IMEUSP
Semestre 1 de 2018
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 3 DE EXERCÍCIOS

1. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
   (b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (c) Utilizando o teorema enunciado em (a) prove o teorema enunciado em (b).

2. (a) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   (b) Enuncie o Teorema da Função Implícita para uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
   (c) Utilizando o teorema enunciado em (a), prove o teorema enunciado em (b).

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por,
$$F(x, y) = (u, v) \text{ com } (u, v) = (x^4 y + x, x + y^3).$$
   (a) Mostre que F é inversível em uma vizinhança do ponto $(1, 1)$ [isto é, em um aberto que contém o ponto $(1, 1)$] e que sua função inversa G é de classe C^1 em uma vizinhança do ponto $F(1, 1) = (u_0, v_0)$. Determine (u_0, v_0).
   (b) Determine $\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0)$.

4. Suponha que as três equações: $F(u, v) = 0$, $u = xy$, e $v = \sqrt{x^2 + z^2}$ definem uma superfície no espaço tri-dimensional $Oxyz$. Determine o vetor normal a esta superfície no ponto $x = 1$, $y = 1$, $z = \sqrt{3}$, sabendo que $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 2) = 1$ e $\frac{\partial F}{\partial v}(1, 2) = 2$.

5. As três equações
$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 & = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 & = 2 \\ xy - (\sin u)(\cos v) + z & = 0\,, \end{cases}$$
definem x, y e z, como funções de u e v. Calcule as derivadas parciais
$$\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial v}$$
no ponto $x = y = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, $z = 0$.

6. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada no conjunto dado.

   (a) $f(x,y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x,y)\ :\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ y - x \leq 3\,,\ x + y \leq 4\}$

   (b) $f(x,y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x,y) \in: x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (c) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$ sobre $K = \{(x,y) : x \geq 0\,, y \geq 0\,, x + y \leq 1\}$.

   (d) $f(x,y) = x + 5y$ em $K = \{(x,y) :\ 5x + 6y \leq 30,\ 3x + 2y \leq 12,\ x \geq 0$ e $y \geq 0\}$.

   (e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $K = \{(x,y) :\ |x| + |y| \leq 1\}$.

   (f) $f(x,y) = xy$, $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$.

7. Determine o ponto do plano $3x+2y+z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias aos pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

8. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas:

   a) $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 \leq 1$

   b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$

   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $x + 2y = 3$

   d) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

   e) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ e $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

9. Ache os pontos de máximo e de mínimo da função $F(x,y,z) = x + 2y + z$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

10. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14,1)$.

11. Deterine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

12. Determine o ponto da reta r abaixo que está mais próximo da origem:

$$r :\quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

13. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.

14. Maximize $f(x,y,z) = x+2y+3z$ sujeita às restrições $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $x+y+z = 1$.

15. Ache um ponto P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e um ponto Q na reta $x + y = 4$ tais que a distância de P a Q é mínima.

16. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x, y) = y^2 - x^2$ restrita ao disco compacto $K = \Big\{(x, y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\Big\}$.

17. Estude, com relação a máximos e mínimos, e com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$, a função

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \ .$$

18. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ e as restrições

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{e} \quad x + y - z = 0.$$

(a) Existem o máximo e o mínimo de f sujeita tais restrições? Justifique.

(b) Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimo e seus valores.

19. **Desigualdade das Médias aritméticas e geométricas.** Utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange mostre que dados $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ então,

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

20. Ache os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 \ .$$

21. Dada $f(x, y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado

$$K = [-1, +1] \times [-1, +1] = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\Big\}.$$