$3^{\underline{a}}$ Prova de MAT 147 - Cálculo II - FEA-USP
28/11/2012

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Escolha 5 (cinco) questões. Justifique todas as passagens.
Não é permitido o uso de calculadoras.
Boa Sorte!

1. Consideremos $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, com (x,y) em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Compute $P_1(x,y)$, o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1,1)$.

   (b) Calcule um valor aproximado para $f(1,001;0,99)$ utilizando $P_1(x,y)$.

   (c) Mostre que se $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$ então,

   $$|f(x,y) - P_1(x,y)| < 7(x-1)^2 + 6(y-1)^2.$$

   (d) Avalie o erro que se comete na aproximação no item (a)

   Solução.

   (a) Temos $f(1,1) = 5$, $f_x = 3x^2 - 2x$, $f_y = 3y^2 + 4$, $f_x(1,1) = 1$, $f_y(1,1) = 7$, $f_{xx} = 6x - 2$, $f_{xy} = 0$ e $f_{yy} = 6y$. Então,

   $P_1(x,y) = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) = 5 + (x-1) + 7(y-1).$

   (b) Temos $f(1,001;0,99) \approx P(1,001;0,99) = 5 + 0,001 - 0,07$. Logo,

   $$P(1,001;0,99) = \frac{5000 + 1 - 70}{1000} = \frac{4931}{1000} = 4,931.$$

   (c) O resto segundo Lagrange satisfaz $f(1,001;0,99) = 4,931 + R(\overline{x},\overline{y})$, onde $(\overline{x},\overline{y})$ é algum ponto no segmento unindo $(1,1)$ e $(1,001;0,99)$, e

   $$R(\overline{x},\overline{y}) = \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-1)^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-1)(y-1) + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-1)^2\Big].$$

   Se $|\overline{x} - 1| < 1$ e $|\overline{y} - 1| < 1$ então

   $$|f_{xx}(\overline{x},\overline{y}| = |6\overline{x} - 2| < 14, \quad |f_{xy}(\overline{x},\overline{y})| = 0, \quad \text{e} \quad |f_{yy}(\overline{x},\overline{y})| < 12.$$

   Logo,

   $$|R(\overline{x},\overline{y})| < \frac{14(x-1)^2 + 12(y-1)^2}{2} = 7(x-1)^2 + 6(y-1^2.$$

   (d) O erro é inferior a $7 \times (10^{-3})^2 + 6(10^{-2})^2 = 607 \times 10^{-6} < 10^3 \times 10^{-6} = 10^{-3}$ ■

2. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada no conjunto dado.

$$f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x \text{ em } K = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x+y \leq 1\}.$$

Solução.

K é a região triângular determinada por $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$:

$$K = \{(x,y) = A + t(B + s\overrightarrow{BC}) = (0,0) + t[(1,0) + s(-1,1)] : t, s \in [0,1]\}.$$

Tal região é fechada e limitada e portanto compacto. Pelo teorema de Weierstrass, como f é contínua, f assume máximo e mínimo sobre K.

- Pontos críticos. Impondo $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \langle 2x+3y-3, 3x\rangle = \langle 0,0\rangle$ encontramos o ponto $(0,1)$, o qual não pertence ao interior de K. Assim sendo, os extremantes de f, restrita a K, pertencem à fronteira de K, indicada ∂K.
- Fronteira ∂K. Tal fronteira é a reunião dos segmentos: $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}$, o segmento $\{(0,t) : 0 \leq t \leq 1\}$ e o segmento $\{(t,1-t) : 0 \leq t \leq 1\}$.
  - ◇ Sobre $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}$ temos o trecho de parábola

    $$f(t,0) = t^2 - 3t = t(t-3), \text{ onde } 0 \leq t \leq 1,$$

    com concavidade para cima. É claro que os extremantes em $[0,1]$ são: para $t = 0$, o ponto $(0,0)$ com $f(0,0) = 0$, e para $t = 1$, o ponto $(1,0)$ com $f(1,0) = -2$.
  - ◇ Sobre $\{(0,t) : 0 \leq t \leq 1\}$ temos a função nula.
  - ◇ Sobre $\{(t,1-t) : 0 \leq t \leq 1\}$ temos a parábola

    $$f(t,1-t) = t^2 + 3t(1-t) - 3t = -2t^2, \text{ onde } 0 \leq t \leq 1$$

    com concavidade para baixo. É claro que os extremantes em $[0,1]$ são: para $t = 0$, o ponto $(0,1)$ com $f(0,1) = 0$ e, para $t = 1$, o ponto $(1,0)$ com $f(1,0) = -2$.

Resposta final.

O valor mínimo é -2, o qual é assumido em $(1,0)$.

O valor máximo é 0, assumido sobre o segmento $\{(0,t) : 0 \leq t \leq 1\}$■

3. Estude, com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela, a função

$$F(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z.$$

Solução. Os pontos críticos de F são dados por

$$\vec{\nabla} F(x,y,z) = \left\langle 3x^2 + 2y - 5, 2x + 2y, 2z - 4 \right\rangle = \langle 0,0,0 \rangle .$$

Donde segue,

$$z = 2,\ y = -x \text{ e } 0 = 3x^2 - 2x - 5 = 3(x+1)\left(x - \frac{5}{3}\right).$$

Logo, os pontos críticos são

$$P = (-1,1,2) \ \text{ e } \ Q = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right).$$

- $\diamond$ A matriz hessiana de f em $(-1,1,2)$ é

$$\mathcal{H}f(P) = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

cuja diagonal troca de sinais. Logo, $(-1,1,2)$ **é ponto de sela**.

- $\diamond$ A matriz hessiana de f em $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ é

$$\mathcal{H}f(P) = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

cujos menores principais são $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 20 - 4 = 16 > 0$ e $\Delta_3 = 32 > 0$. Logo, $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ **é um ponto de mínimo local estrito**.

- $\diamond$ f não admite pontos de máximo local $\blacksquare$

4. Seja $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$.

   (a) Esboce a região do plano em que f é positiva.

   (b) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

   (c) f tem um máximo ou um mínimo em todo plano ? Justifique.

Solução.

(b) Pelo esboço em (a) é fácil ver que $(\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{3},\mathbf{0})$ e $(\mathbf{0},\mathbf{3})$ **são pontos de sela**. Localizemos outros pontos críticos. Impondo,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -(3-y)(x+y-3) + (3-x)(3-y) & = 0 \\ f_y(x,y) = -(3-x)(x+y-3) + (3-x)(3-y) & = 0, \end{cases}$$

obtemos

$$\begin{cases} (3-y)(6-2x-y) = 0 \\ (3-x)(6-2y-x) = 0. \end{cases}$$

Se $y = 3$ temos $x = 3$ ou $x = 0$. Se $x = 3$ temos $y = 3$ ou $y = 0$. Encontramos então, nestes casos, os pontos

$$(3,0), \ (3,3), \ \text{ou } (0,3).$$

Se $x \neq 3$ e $y \neq 3$ então temos os sistema

$$\begin{cases} 6-2x-y = 0 \\ 6-2y-x = 0. \end{cases}$$

Que tem solução única $(2,2)$. O ponto $(2,2)$ pertence ao interior da região triangular $\boldsymbol{\Delta}$, fechada e limitada (logo, compacta), delimitada pelas retas $x = 3$, $y = 3$ e $x + y = 3$. Na fronteira desta região f é nula e, por (a), a função f é estritamente positiva no interior da região Δ.

Pelo teorema de Weierstrass, f tem um máximo absoluto na região Δ e, por acima, tal ponto está no interior de Δ. Como f tem um só ponto crítico no interior de Δ, segue que $(\mathbf{2},\mathbf{2})$ **é um ponto de máximo local de** f.

(c) É claro que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = (3-x)3(x-3) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) = (3-x)(3-x)(2x+3) = +\infty. \end{cases}$$

Logo, f não assume nem mínimo nem máximo absolutos no plano■

5. Determine entre os pontos da curva dada pela intersecção das superfícies

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

os mais próximos da origem. Esboce ao menos uma das superfícies.

Solução.

- A segunda superfície é um cilindro cuja base é um círculo no plano Oxy, de raio 1 e centrado na origem, e eixo vertical Oz.
- Se (x, y, z) pertence à curva intersecção L, temos $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ e $\mathbf{z^2} = -\mathbf{xy}$; logo, $|z| \leq 1$. Assim, L é limitada. Ainda, L é fechada pois as regiões $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \neq 1\}$ e $\{(x, y, z) : x^2 - xy + y^2 - z^2 \neq 1\}$ são abertas. Logo, L é compacta.
- Pelo Teorema de Weierstrass a função (contínua) quadrado da distância $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ restrita a L assume um mínimo absoluto.
- Dado $(x, y, z) \in L$, mostremos que os vetores gradiente $\langle 2x - y, -x + 2y, -2z\rangle$ e $\langle 2x, 2y, 0\rangle$ são L.I.. Supondo-os LD, como o segundo deles é não nulo (pois $x^2 + y^2 = 1$), vemos que o primeiro é um múltiplo do segundo. Logo, $z = 0$. Sobre L vale $\mathbf{z^2} = -\mathbf{xy}$. Assim temos $x = 0$ ou $y = 0$. Se $x = 0$, como $2x - y$ é múltiplo de $2x$, obtemos $y = 0$. Absurdo, pois $(0, 0, 0) \notin L$. Se $y = 0$, como $-x + 2y$ é múltiplo de $2y$, segue $x = 0$. Absurdo, pois $(0, 0, 0) \notin L$.
- Seja $P = (x, y, z)$ um extremante de D sobre L. Por Lagrange temos

  $$0 = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - y & -x + 2y & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 2^2[x(2yz + xz - 2yz) - y(2xz - 2xz + yz)].$$

  Logo, $0 = (x^2 - y^2)z$. Se $z = 0$ temos (já que $\mathbf{z^2} = -\mathbf{xy}$ e $\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} = \mathbf{1}$)

  $$\text{os pontos} \quad (\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0).$$

  Se $y = x$ temos $x \neq 0$ e $z^2 = -x^2$. Absurdo! Se $y = -x$ temos $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e

  $$\text{os pontos} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- Os quatro primeiros pontos distam $\sqrt{1} = 1$ da origem. Os quatro últimos pontos distam $\sqrt{\frac{3}{2}}$ da origem. Assim, os quatro primeiros são os procurados$\blacksquare$

6. Dada $f(x,y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes de f e os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f no quadrado (esboce)

$$K = [-1,+1] \times [-1,+1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad \text{e} \quad |y| \leq 1\}.$$

Solução.

Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\overrightarrow{\nabla} f = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10 \rangle = \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; 2x + 3y - 1 = 0 \text{ e } 9x + 4y - 5 = 0.$$

O único ponto crítico no interior de K é $P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)$. A matriz hessiana é

$$\mathcal{H}f(P_0) = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e $\det \mathcal{H}f(P_0) < 0$. Logo, P_0 é de sela e f não tem extremante local em $\text{int}(K)$. Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1,1] \;\cup\; \{1\} \times [-1,1] \;\cup\; [-1,1] \times \{-1\} \;\cup\; [-1,1] \times \{1\}\ .$$

Os extremantes locais na fronteira de K, mas não um vértice, satisfazem:

- $\diamond$ Em $\{-1\}\times]-1,1[$ temos $x = -1$ e $0 = f_y = -18 + 8y - 10$; logo, $y = 7/2$, possibilidade que descartamos.
- $\diamond$ Em $\{1\}\times]-1,1[$ temos $x = 1$ e $0 = f_y = 18 + 8y - 10$; logo, $y = -1$ e $P_1 = (1,-1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.
- $\diamond$ Em $]-1,1[\times\{-1\}$ temos $y = -1$ e $0 = f_x = 12x - 18 - 6$; logo, $x = 2$, que também descartamos.
- $\diamond$ Em $]-1,1[\times\{1\}$ temos $y = 1$ e $0 = f_x = 12x + 18 - 6$; logo, $x = -1$ e $P_2 = (-1,1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analizado à parte.

Finalmente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre o vértices. Temos, $f(1,1) = 17$, $f(-1,-1) = 49$, $f(1,-1) = +1$, e $f(-1,+1) = -7$.

Resposta. Não existem máximo ou mínimo locais e interiores. Ainda, $f(-1,+1) = -7$ é o mínimo absoluto e $f(-1,-1) = 49$ é o máximo absoluto$\blacksquare$

7. (a) Seja $c > 0$ uma constante. Determine o valor máximo de

$F(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície $x + y + z = c$, com $x \geq 0, y \geq 0$ e $z \geq 0$.

(b) Mostre então que a média geométrica de três números $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ é menor ou igual a média aritmética destes números. Isto é,

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Solução.

(a) A superfície dada, com as restrições dadas, é a região triangular $\boldsymbol{\Delta}$ fechada e limitada (compacta) com vértices $A = (c, 0, 0)$, $B = (0, c, 0)$ e $C = (0, 0, c)$:

$$\boldsymbol{\Delta} = \{(x, y, z) = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}, \text{ com } s \geq 0, \; t \geq 0 \text{ e } 0 \leq s + t \leq 1\}.$$

◇ Pelo teorema de Weierstrass, a função (contínua) F restrita a Δ tem um máximo num ponto (x_0, y_0, z_0). É claro que $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ e $z_0 > 0$.

◇ O gradiente de $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ é $\overrightarrow{\nabla}\varphi = \langle 1, 1, 1 \rangle \neq \overrightarrow{0}$. Por multiplicadores de Lagrange, no ponto (x_0, y_0, z_0) temos

$$\overrightarrow{\nabla} F = \langle y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0 \rangle = \lambda \langle 1, 1, 1 \rangle .$$

Logo, $y_0 z_0 = x_0 z_0 = x_0 y_0$. Como x_0, y_0 e z_0 são não nulos temos $x_0 = y_0 = z_0$. Como (x_0, y_0, z_0) pertence a Δ temos $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{c}{3}$.

◇ Assim, o valor máximo de f sobre Δ é

$$F(x_0, y_0, z_0) = \frac{c^3}{27}.$$

(b) Dados três números estritamente positivos x, y e z, mostramos que

$$xyz \leq \frac{(x + y + z)^3}{27}.$$

Portanto,

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3} \blacksquare$$