$6^{\underline{a}}$ Lista de MAT147 - Cálculo II - FEAUSP
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2012
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada em volta do ponto (x_0, y_0).

   (a) $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$,

   (b) $f(x,y) = \sin(3x+4y)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$.

2. Sejam $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $(1,1)$.

   (a) Calcule um valor aproximado para $f(1,001; 0,99)$, utilizando $P_1(x,y)$.

   (b) Mostre que se $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$ então,
   $$|f(x,y) - P_1(x,y)| < 7(x-1)^2 + 6(y-1)^2 \ .$$

   (c) Avalie o erro que se comete na aproximação do item (a).

3. Seja $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m,$, com a, b, c, d, e, m constantes reais e seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Prove que para todo (h,k) em $\mathbb{R}^2$ temos
   $$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2 \ .$$

4. Determine os pontos de máximo e mínimo local de $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$.

5. Estude quanto a máximos e mínimos locais as funções
   a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
   b) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
   c) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$.
   d) $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

6. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x,y) = y^2 - x^2$ sobre $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

7. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

8. Determine (x,y), com $x^2 + 4y^2 \leq 1$ que maximiza a soma $2x + y$.

9. Determine os valores extremos, locais e absolutos, e os pontos de sela de
   $$f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2), \quad \text{onde } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1.$$

10. Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções:

a) $F(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$

b) $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$

c) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$

d) $F(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$.

11. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada no conjunto dado.

(a) $f(x, y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x, y) \ : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ y - x \leq 3\,,\ x + y \leq 4\}$

(b) $f(x, y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x, y) \in: x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 3x$ sobre $K = \{(x, y) : x \geq 0\,, y \geq 0\,, x + y \leq 1\}$.

(d) $f(x, y) = x + 5y$ em $K = \{(x, y) :\ 5x + 6y \leq 30,\ 3x + 2y \leq 12,\ x \geq 0$ e $y \geq 0\}$.

(e) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $K = \{(x, y) :\ |x| + |y| \leq 1\}$.

(f) $f(x, y) = xy$, sobre $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$.

12. Estude com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela a função:

a) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

b) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy\,,\ x > 0$ e $y > 0$

c) $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$

d) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 5x + 2y - z + 8$

13. Determine e classifique os pontos estacionários de

a) $f(x, y) = y^2 + (x + 1)^2y + (x + 1)^4$

b) $F(x, y, z) = x^4 + x^2y + y^2 + z^2 + xz + 1$

14. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas:

a) $f(x, y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 \leq 1$

b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $x + 2y = 3$

d) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

e) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ e $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

15. Determine o valor máximo de $f(x, y) = x + 5y$ onde x e y estão sujeitos às condições

$$5x + 6y \leq 30,\ 3x + 2y \leq 12,\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

16. Seja $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$.

(a) Represente, com um desenho, a região do plano em que f é positiva.

(b) Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

(c) f tem um máximo ou um mínimo em todo plano ? Justifique.

17. Seja $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

(a) Represente, com um desenho, a região em que $f \geq 0$.

(b) Mostre que f restrita a qualquer reta $y = mx$ tem um mínimo em $(0, 0)$.

(c) Mostre que $(0, 0)$ não é um ponto de mínimo relativo de f