$5^{\underline{a}}$ Lista de MAT147 - Cálculo II - FEA-USP
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2012

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$, $g = g(u, v) : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto de Ω e $F = F(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, e o gráfico de g contido numa superfície de nível de F. Então: $P_0 \in Gr(g)$ e $\vec{\nabla} f(P_o) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} f(P_o)$ é ortogonal ao plano tangente ao gráfico de g no ponto P_o.

2. Seja $f(x, y)$ diferenciável e sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$ unitários e ortogonais. Então:
$$\vec{\nabla} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \vec{u} \; + \; \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \vec{v} \; .$$

3. A função diferenciável $z = f(x, y)$ é dada implicitamente por $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

4. Seja $w = f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

   a) Dê um exemplo de uma curva $\gamma = \gamma(t)$, com imagem contida na superfície de nível 1 de $f : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

   b) Prove que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0, \quad \forall t_0$ no domínio de γ.

   c) Determine a equação do plano tangente à superfície dada, no ponto (x_0, y_0, z_0).

   d) Dê a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1, 1, 1)$.

5. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$ e que a sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto ?

6. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado.

   (a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.

   (b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$.

7. Determine uma reta tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

8. Determine um plano tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

9. Ache um plano contendo $(5, 0, 1)$ e $(1, 0, 3)$ e tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

10. A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na intersecção da superf. cilíndrica $x^2 + y^2 = 2$ com a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Suponha $\gamma(t_0) = (1, 1, 1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

    (a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

    (b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

11. É dada uma curva $\gamma(t)$ cuja imagem é a intersecção das superfícies $4x^2 + y^2 = 1$ e $x + y + z = 1$. Suponha $\gamma(t_0) = (0, 1, 0)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

    (a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

    (b) Determine uma parametrização para a intersecção acima.

12. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto dado.

    (a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.

    (b) $2xyz = 3$ em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$.

    (c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$.