

3ª Lista de MAT147 - Cálculo II - FEA
2º semestre de 2012
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

4. Determine as derivadas parciais de:

a) $f(x, y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$ b) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}$

c) $z = x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)$ d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$

e) $z = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$ f) $z = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $f(3) = 4$ e $g(x, y, z) = \int_0^{x+y^2+z^4} f(t)dt$. Compute,

a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ b) $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ c) $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

6. Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $\varphi'(3) = 4$. Seja $g(x, y, z) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$.

Calcule: a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1, 1)$ b) $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1)$ c) $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1)$

7. Calcule $\frac{dz}{dt}$ supondo,

a) $z = \text{sen}(xy)$, $x = 3t$, $e y = t^2$ b) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x = \text{sent}$, $y = \text{cost}$

8. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$. Compute,

a) $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f . b) $g'(0)$ supondo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$.

9. Suponha que, para todo x , $f(3x, x^3) = \arctg(x)$

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$

b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$

10. Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f .

11. Prove que $u = f(x + at, y + bt)$, a, b constantes, é solução da equação as derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}$$

12. Seja γ uma curva que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$.

a) Dê a equação da reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$. b) Ache uma curva $\gamma(t)$ como em (a).

13. Sejam $f(x, y, z)$ e $g(x, y)$ funções diferenciáveis com $f(x, y, g(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in \text{Dom}(g)$.
Suponha $g(1, 1) = 3, \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 3) = 2, \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 3) = 5$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 3) = 10$.

Determine a equação do plano tangente ao gráfico de g , no ponto $(1, 1, 3)$.

14. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$. Compute,

a) $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f . b) $g'(0)$.

15. Seja $g(x, y) = xf(x^2 + y, 2y, 2x - y)$. Expresse $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ em termos de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

16. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

17. Determine o plano tangente e a reta normal à superfície $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$.

18. Em que direção e sentido a função dada cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapidamente.

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ em $(1, 1)$ b) $f(x, y) = \ln \|(x, y)\|$ em $(1, -1)$.

c) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

19. Seja $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$.

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, 3); \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ onde \vec{u} aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f .

20. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ é uma distribuição de temperatura no plano x, y . Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.