Curso: MAT 147- CÁLCULO II - FEAUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2012

(9) (Lista 6) Determine os valores extremos, locais e absolutos, e os pontos de sela de

$$f(xy) = xy(1 - x^2 - y^2) = xy - x^3y - xy^3, \text{ onde } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1.$$

Solução. Pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo no quadrado compacto $[0,1] \times [0,1]$. Os extremantes podem pertencer ao interior de K ou à fronteira de K.

Determinemos os pontos críticos de f no interior de K. Impondo

$$\nabla f = \left\langle y - 3x^2y - y^3, x - 3xy^2 - x^3 \right\rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

encontramos o sistema

$$\begin{cases} y(1 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ x(1 - 3y^2 - x^2) = 0. \end{cases}$$

Uma solução da primeira equação é $y = 0$. Neste caso temos $x(1 - x^2) = 0$ e os pontos

$$(0,0), (1,0) \text{ e } (-1,0).$$

Mas, nenhum destes três pontos pertence ao interior de K. Analogamente, se $x = 0$, obtemos pontos críticos não pertencentes ao interior de K. Determinemos então $x \neq 0$ e $y \neq 0$ tais que

$$\begin{cases} 1 - 3x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 3y^2 - x^2 = 0. \end{cases}$$

Temos então $3x^2 + y^2 = 1 = 3y^2 + x^2$. Logo, $2x^2 - 2y^2 = 0$. Donde segue, $y = \pm x$. A reta $y = -x$ não cruza o interior de K. Resta então a reta $y = x$. Neste caso obtemos

$$1 = 4x^2.$$

Logo, $x = \pm\frac{1}{2} = y$. Assim, o **único ponto crítico de f no interior de K** é

$$P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

A matriz hessiana de f em um ponto (x,y) arbitrário e no ponto P_0 são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} -6xy & 1 - 3x^2 - 3y^2 \\ 1 - 3x^2 - 3y^2 & -6xy \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim, temos $f_{xx}(P_0) = -\frac{3}{2} < 0$ e $Hf(P_0) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 > 0$. Logo,

$$P_0 \text{ é ponto de máximo local de } f \text{ e } f(P_0) = \frac{1}{8} \text{ é valor máximo local.}$$

Analisemos agora f na fronteira de K. Temos,

$$f(x,0) = 0, \text{ se } 0 \le x \le 1, \qquad\qquad f(0,y) = 0, \text{ se } 0 \le y \le 1,$$

$$-1 \le f(1,y) = -y^3 \le 0, \text{ se } 0 \le y \le 1, \qquad\qquad -1 \le f(x,1) = -x^3 \le 0, \text{ se } 0 \le x \le 1.$$

Logo, P_0 é ponto de máximo absoluto e $\frac{1}{8}$ é valor máximo absoluto. Ainda, $(1,1)$ é ponto de mínimo absoluto e $f(1,1) = -1$ é valor mínimo absoluto$\blacksquare$

(14) (a) (Lista 6) Determine e classifique os pontos estacionários de

$$f(x,y) = y^2 + (x+1)^2 y + (x+1)^4.$$

Solução. Os pontos críticos de f satisfazem

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \Big\langle (x+1)[2y + 4(x+1)^2], 2y + (x+1)^2 \Big\rangle = \langle 0,0 \rangle\,.$$

Donde segue $2y = -(x+1)^2$ e assim $(x+1)3(x+1)^2 = 0$. Obtemos então o ponto

$$P = (-1,0).$$

As derivadas parciais de f são,

$$f_{xx} = 2y + 12(x+1)^2, f_{xy} = f_{yx} = 2(x+1) \text{ e } f_{yy} = 2.$$

Logo, $f_{xx}(-1,0) = 0$, $f_{xy}(-1,0) = f_{yx}(-1,0) = 0$, $f_{yy}(-1,0) = 2$ e $Hf(-1,0) = 0.2 - 0.0 = 0$. A análise da matriz hessiana não basta para dizermos se $(-1,0)$ é ponto de mín/máx/sela. Observando a fatoração e a desigualdade

$$f(x,y) = \left[(x+1)^2 + \frac{y}{2}\right]^2 + \frac{3y^2}{4} \ge 0.$$

Concluímos que $(-1,0)$ é ponto de mínimo absoluto de f sobre o plano $(\mathbb{R}^2)\blacksquare$