3ª Prova de MAT 147 - Cálculo II - FEA-USP
26/11/2018

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ____________________
NºUSP : ____________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Justifique todas as passagens.
Boa Sorte!

1. (a) Enuncie o Teste do Hessiano para funções em duas variáveis.
   (b) Enuncie o Teorema de Weierstrass para funções em duas variáveis.
   (c) Estude com relação a máximos e mínimos, locais e absolutos, a função dada no conjunto dado.

$$f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x \text{ em } K = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}.$$

Esboce o conjunto K.

Solução de (c).

K é a região triângular determinada por $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$:

$$K = \{(x,y) = A + t(B + s\overrightarrow{BC}) = (0,0) + t[(1,0) + s(-1,1)] : t, s \in [0,1]\}.$$

Tal região é fechada e limitada e portanto compacto. Pelo teorema de Weierstrass, como f é contínua, f assume máximo e mínimo sobre K.

- Pontos críticos. Impondo $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \langle 2x + 3y - 3, 3x \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ encontramos o ponto $(0,1)$, o qual não pertence ao interior de K. Assim sendo, os extremantes de f, restrita a K, pertencem à fronteira de K, indicada ∂K.
- Fronteira ∂K. Tal fronteira é a reunião dos segmentos: $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}$, o segmento $\{(0,t) : 0 \leq t \leq 1\}$ e o segmento $\{(t, 1-t) : 0 \leq t \leq 1\}$.
  - ⋄ Sobre $\{(t,0) : 0 \leq t \leq 1\}$ temos o trecho de parábola
  $$f(t,0) = t^2 - 3t = t(t-3), \text{ onde } 0 \leq t \leq 1,$$
  com concavidade para cima. É claro que os extremantes em $[0,1]$ são: para $t = 0$, o ponto $(0,0)$ com $f(0,0) = 0$, e para $t = 1$, o ponto $(1,0)$ com $f(1,0) = -2$.
  - ⋄ Sobre $\{(0,t) : 0 \leq t \leq 1\}$ temos a função nula.
  - ⋄ Sobre $\{(t,1-t) : 0 \leq t \leq 1\}$ temos a parábola
  $$f(t, 1-t) = t^2 + 3t(1-t) - 3t = -2t^2, \text{ onde } 0 \leq t \leq 1$$
  com concavidade para baixo. É claro que os extremantes em $[0,1]$ são: para $t = 0$, o ponto $(0,1)$ com $f(0,1) = 0$ e, para $t = 1$, o ponto $(1,0)$ com $f(1,0) = -2$.

Resposta final.

O valor mínimo é -2, o qual é assumido em $(1,0)$.

O valor máximo é 0, assumido sobre o segmento $\{(0,t) : 0 \leq t \leq 1\}$♣

2. (a) Enuncie o Teste do Hessiano para funções em três variáveis.
   (b) Estude, com relação a máximos e mínimos locais e pontos de sela, a função

$$F(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z.$$

   (c) Estude a função acima quanto a máximos e mínimos globais (ou absolutos).

Solução.

(b) Os pontos críticos de F são dados por

$$\overrightarrow{\nabla} F(x, y, z) = \left\langle 3x^2 + 2y - 5, 2x + 2y, 2z - 4 \right\rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle .$$

Donde segue,

$$z = 2,\ y = -x \text{ e } 0 = 3x^2 - 2x - 5 = 3(x + 1)\left(x - \frac{5}{3}\right).$$

Logo, os pontos críticos são

$$P = (-1, 1, 2) \text{ e } Q = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right).$$

- ◇ A matriz hessiana de f em $(-1, 1, 2)$ é

$$\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cuja diagonal troca de sinais. Logo, $(-1, 1, 2)$ **é ponto de sela**.

- ◇ A matriz hessiana de f em $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ é

$$\mathcal{H}f(P) = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

cujos menores principais são $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 20 - 4 = 16 > 0$ e $\Delta_3 = 32 > 0$. Logo, $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 2\right)$ **é um ponto de mínimo local estrito**.

- ◇ f não admite pontos de máximo local.

(c) Temos $F(x, 0, 0) = x^5 - 5x$. Logo, $F(x, 0, 0) \to \pm\infty$ conforme $x \to \pm\infty$. Donde segue que a função em três variáveis $F = F(x, y, z)$, definida em $\mathbb{R}^3$, não tem máximo absoluto nem mínimo absoluto ♣

3. (Vide Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exercício 21 p. 332)

   (a) Enuncie o Método dos Multiplicadores de Lagrange para funções em três variáveis e com uma condição.

   (b) Enuncie o Teorema de Weierstrass para funções em três variáveis.

   (c) Esboce a superfície
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$
   e verifique que ela é um conjunto compacto (isto é, fechado e limitado).

   (d) Determine o paralepípedo-retângulo de volume máximo, com arestas paralelas aos eixos coordenados, inscrito na superfície acima.

Solução.

   (c) A superfície é um elipsóide com centro na origem $(0,0,0)$, com *polos* $(\pm 2,0,0)$, $(0,\pm 3,0)$ e $(0,0,\pm 4)$.

   (d) O paralelepípedo procurado está centrado na origem e tem a forma $[-x,x]\times[-y,y]\times[-z,z]$, com $x>0$, $y>0$ e $z>0$ e, ainda, com (x,y,z) pertencente à superfície elipsoidal e portanto satisfazendo
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$
   Os oito pontos $(\pm x,\pm y,\pm z)$ pertencem ao elipsóide e são os oito vértices do paralelepípedo.

   O volume deste paralelepípedo é $F(x,y,z)=8xyz$. No ponto de máximo (tal problema não tem um ponto de minimo), o método dos multiplicadores de Lagrange garante que
$$(8yz,8xz,8xy)=\lambda\left(\frac{2x}{4},\frac{2y}{9},\frac{2z}{16}\right).$$
   Donde segue (pois x, y e z são estritamente positivos)
$$\frac{8yz}{\frac{2x}{4}}=\frac{8xz}{\frac{2y}{9}}=\frac{8xy}{\frac{2z}{16}}\Longrightarrow\frac{16yz}{x}=\frac{36xz}{y}=\frac{64xy}{z}.$$
   Donde segue
$$\begin{cases}\frac{16yz}{x}=\frac{36xz}{y}\\[2ex]\frac{36xz}{y}=\frac{64xy}{z}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{16y}{x}=\frac{36x}{y}\\[2ex]\frac{36z}{y}=\frac{64y}{z}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}16y^2=36x^2\\[2ex]36z^2=64y^2.\end{cases}$$
   Donde segue
$$y=\frac{3x}{2}\ \text{ e }\ z=\frac{4y}{3}=2x.$$
   Substituindo $y=3x/2$ e $z=2x$ na equação do elipsóide encontramos
$$\frac{3x^2}{4}=1\Longrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$
   O paralelepípedo procurado é
$$\left[-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right]\times\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]\times\left[-\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}\right]\ \clubsuit$$

4. (Vide Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exemplo 6 p. 331)

(a) Enuncie o Método dos Multiplicadores de Lagrange para funções em três variáveis e com duas condições.

(b) Enuncie o Teorema de Weierstrass para funções em três variáveis.

(c) Ache os pontos mais próximos da origem e os pontos mais afastados da origem, todos com coordenadas sujeitas às restrições

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x + y + z = 1 \ .$$

Esboce as superfícies acima e verifique que tal intersecção de superfícies é um conjunto compacto (isto é, fechado e limitado).

Solução.

(c) Consideremos a função quadrado da distância

$$D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Minimizemos e maximizemos D sujeita às restrições dadas.
Verificado que existem os pontos procurados e que o método dos multiplicadores de Lagrange se aplica, devemos ter

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 8y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x(8y - 2z) - 2y(2x - 2z) + 2z(2x - 8y) = 0.$$

Logo,

$$x(4y-z)-y(x-z)+z(x-4y) = 0 \Longrightarrow 4xy-xz-xy+yz+xz-4yz = 0 \Longrightarrow 3xy-3yz = 0.$$

Donde segue $y = 0$ ou $z = x$.

◇ O caso $y = 0$. Substituindo nas condições encontramos

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ x + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow 2x^2-2x-3 = 0 \Longrightarrow 0 = x^2-x-\frac{3}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{6}{4}.$$

Encontramos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \text{ e } z = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{2}.$$

Seguem os pontos

$$P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right).$$

◇ O caso $z = x$. Substituindo nas condições temos

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Longrightarrow x^2+2(1-2x)^2 = 2 \Longrightarrow 9x^2-8x = 0 \Longrightarrow 9x\left(x - \frac{8}{9}\right) = 0.$$

Encontramos os pontos

$$P_3 = (0, 1, 0) \text{ e } P_4 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right).$$

Temos

$$D(P_1) = D(P_2) = 4 \quad D(P_3) = 1 \quad \text{e} \quad D(P_4) = \frac{64 + 49 + 64}{81} = \frac{176}{81} = 2+\frac{14}{81}.$$

Assim, P_1 e P_2 são os pontos mais distantes da origem enquanto P_3 é o mais próxima da origem♣