2ª Prova de MAT 147 - Cálculo II - FEA-USP
24/10/2018

Nome : ____________GABARITO____________
NºUSP : ______________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Justifique todas as passagens.

Boa Sorte!

1. Seja
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   (a) Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

   (b) Determine as derivadas parciais de f (se existirem) em cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   (c) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$? Justifique.

   (d) Determine se a função f é diferenciável em $(0,0)$.

Solução.

(a) Em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, a função f é o quociente de dois polinômios (contínuos) com o denominador não se anulando. Logo, f é aí contínua.
Na origem temos
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x=0 \quad \text{e} \quad 0\leq\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1, \quad \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0).$$
Assim, pelo teorema do confronto segue
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0).$$
Donde, f é também contínua na origem. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) É fácil ver que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}-\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(c) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, as derivadas parciais de f são quocientes de polinômios com o denominador não se anulando. Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas aí. Logo, por um teorema provado em aula, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(d) Quanto à origem, analisemos se é zero ou não o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= -\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Se $h = k > 0$ obtemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{2\sqrt{2}h^2|h|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0.$$

Logo, f não é diferenciável na origem $\clubsuit$

2. (Vide Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exercício 12 p. 204)

Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de

$$f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$$

e que contenham o eixo x.

Solução.

◇ A equação geral do plano tangente ao gráfico da função em duas variáveis $z = f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ em um ponto arbitrário $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, 2 + x_0^2 + y_0^2)$ é

$$\pi_{P_0}: \; z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Donde segue

$$\pi_{P_0}: \; z - (2 + x_0^2 + y_0^2) = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

e então

$$z - 2 - x_0^2 - y_0^2 = 2x_0x - 2x_0^2 + 2y_0y - 2y_0^2.$$

Encontramos então a equação

$$\pi_{P_0}: \; 2x_0x + 2y_0y - z + (2 - x_0^2 - y_0^2) = 0.$$

◇ O eixo x é o conjunto $\{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Assim, o eixo x está contido no plano π_{P_0} se e somente se temos

$$2x_0x + 2y_00 - 0 + (2 - x_0^2 - y_0^2) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$2x_0x = x_0^2 + y_0^2 - 2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Donde então seguem as condições

$$x_0 = 0 \;\text{ e }\; x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0.$$

Concluímos então que temos dois pontos, no gráfico, a analisar. A saber,

$$P_1 = (0, \sqrt{2}, 4) \;\text{ e }\; P_2 = (0, -\sqrt{2}, 4).$$

◇ Encontramos então dois planos

$$\begin{cases} \pi_1: \; z - 4 = 2\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}y - 4 \\ \text{e} \\ \pi_2: \; z - 4 = -2\sqrt{2}(y + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}y - 4. \end{cases}$$

◇ **Resposta final.**

$$\boxed{\begin{cases} \pi_1: \; z = 2\sqrt{2}y \\ \text{e} \\ \pi_2: \; z = -2\sqrt{2}y \end{cases}} \clubsuit$$

3. (Vide Guidorizzi, Cálculo, Vol 2, 5ª edição, Exercício 9 p. 256)

Considere o ponto $p = (1, 2, 3)$.

(a) Determine a equação do plano π_1, tangente no ponto p à superfície

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

(b) Determine a equação do plano π_2, tangente no ponto p à superfície

$$S_2 : xyz = 6.$$

(c) Determine a equação do plano normal π_N, no ponto p, à intersecção das superfícies S_1 e S_2.

[Terminologia: o plano normal π_N contém o ponto p, e é ortogonal à superfíce S_1 e também à superfície S_2. Isto é, o plano normal contém o ponto p e é ortogonal ao plano π_1 e ao plano π_2.]

Solução.

(a) A superfície S_1 é a superfície de nível 1 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, com $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ e $\nabla f(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$. Logo,

$$\pi_1 : \ 2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{\pi_1 : \ x + 2y + 3z - 14 = 0.}$$

(b) A superfície S_2 é a superfície de nível 6 de $g(x, y, z) = xyz$, e assim temos $\nabla g = (yz, xz, xy)$ e $\nabla g(1, 2, 3) = (6, 3, 2)$. Logo,

$$\pi_2 : \ 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{\pi_2 : \ 6x + 3y + 2z - 18 = 0.}$$

(c) Os vetores normais a π_1 e a π_2 são paralelos ao plano normal π_N. Ainda, tais vetores normais $(1, 2, 3)$ e $(6, 3, 2)$ não são paralelos entre si. Logo, tais vetores são vetores diretores do plano normal π_N. Encontramos então a equação vetorial

$$\boxed{\pi_N : \ (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 3) + \mu(6, 3, 2), \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \mu \in \mathbb{R}}$$

Utilizando o produto vetorial

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-5, 16, -9)$$

encontramos a equação

$$\pi_N : -5(x-1) + 16(y-2) - 9(z-3) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{\pi_N : \ 5x - 16y + 9z = 0} \clubsuit$$

4. Suponhamos que todas as funções a seguir são diferenciáveis. Sejam $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e $y = y(x)$ e $z = z(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} F(x, y(x), z(x)) & = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ G(x, y(x), z(x)) & = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \\ (0, y(0), z(0)) & = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Suponha ainda que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0) = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = 3, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 4, \\ \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0) = 4, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(0,0,0) = 6, \quad \frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0) = 9. \end{cases}$$

Determine os valores de

$$\frac{dy}{dx}(0) = y'(0) \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{dx}(0) = z'(0).$$

Solução.

Pela regra da cadeia temos, derivando as duas primeiras equações do sistema acima em relação a x e avaliando as derivadas em $x = 0$,

$$\begin{cases} F_x(0,0,0).1 + F_y(0,0,0)y'(0) + F_z(0,0,0)z'(0) = 0 \\ \\ G_x(0,0,0).1 + G_y(0,0,0)y'(0) + G_z(0,0,0)z'(0) = 0. \end{cases}$$

Substituindo os valores dados obtemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Então, pela regra de Cramer concluímos

$$y'(0) = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad z'(0) = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{3} = 0 \clubsuit$$