$1^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo II - FEA-USP - MAT147
12/09/2018

Nome : ____________________ GABARITO____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Q	N
1	
2	
3	
4	

Justifique todas as passagens.

Boa Sorte!

1. Determine uma equação do plano contendo os pontos $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ e $(9,7,8)$.

   Solução.

   Uma equação (a vetorial) para o plano π indicado é

$$\pi : (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(3,3,3) + \mu(8,5,5), \text{ onde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \mu \in \mathbb{R} \clubsuit$$

2. Considere as retas

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{e} \quad L_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3} \ .$$

(a) Verifique se tais retas são reversas ou não.

(b) Se concorrentes, determine o ponto de intersecção.

(c) Se reversas ou paralelelas, compute a distância entre elas.

Solução.

- Sejam $v_1 = (2, 2, 1)$ e $v_2 = (1, -1, 3)$, vetores diretores de L_1 e L_2, respectivamente.
- Como v_1 e v_2 não são paralelos, segue que as retas L_1 e L_2 não são paralelas
- Consideremos os pontos $A = (1, 3, 2) \in L_1$ e $B = (2, 6, -2) \in L_2$ e o vetor $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -4)$. Para saber se L_1 e L_2 são coplanares ou reversas, computamos o determinante (um produto misto)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 7 + (-3) \times 5 + (-4) \times (-4) = 8 \neq 0.$$

Isto mostra que L_1 e L_2 não são coplanares.

Temos então as seguintes respostas.

(a) As retas L_1 e L_2 são reversas.

(b) As retas L_1 e L_2 não são concorrentes.

(c) A distância d entre L_1 e L_2 é dada por

$$d = \left| \frac{\left\langle \overrightarrow{AB}, (2,2,1) \times (1,-1,3) \right\rangle}{\|(2,2,1) \times (1,-1,3)\|} \right|$$

ou, melhor ainda, utilizando produto misto obtemos

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{\left[\overrightarrow{AB}, (2,2,1), (1,-1,3) \right]}{\|(2,2,1) \times (1,-1,3)\|} \right| \\ &= \frac{8}{\|(2,2,1) \times (1,-1,3)\|} \\ &= \frac{8}{\|(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})\|} \\ &= \frac{8}{\| -2\vec{k} - 6\vec{j} - 2\vec{k} + 6\vec{i} + \vec{j} + \vec{i}\|} \\ &= \frac{8}{\|(7,-5,-4)\|} \\ &= \frac{8}{\sqrt{90}} \clubsuit \end{aligned}$$

3. (a) Esboce e identifique a superfície em $\mathbb{R}^3$

$$x^2 + 4(y-1)^2 + 9z^2 = 1.$$

(b) Esboce e identifique a superfície em $\mathbb{R}^3$

$$y^2 + z^2 - 4x = 4.$$

(c) Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico da função

$$z = x^2 + 4y^2 - 3.$$

Solução.

(a) Temos o elipsóide centrado no ponto $(0,1,0)$ [isto é, $(0,1,0)$ é o ponto médio entre os focos do elipsóide] determinado pela equação

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1.$$

(b) Temos o parabolóide circular

$$x = \frac{y^2+z^2}{4} - 1.$$

Tal parabolóide circular tem o eixo Ox por eixo de simetria.
O vértice é o ponto $(-1,0,0)$.
A concavidade é voltada no sentido de crescimento ao longo do eixo Ox.

(c) Temos o parabolóide elíptico

$$z = x^2 + 4y^2 - 3.$$

Tal parabolóide elíptico tem o eixo Oz por eixo de simetria.
O vértice é o ponto $(0,0,-3)$.
A concavidade é voltada "para cima" (sentido de crescimento do eixo Oz).
A curva de nível l, onde $l > -3$, é a elipse no plano cartesiano Oxy, centrada na origem, e dada pela equação

$$x^2 + 4y^2 = l + 3.$$

A curva de nível l, onde $l = -3$, é o ponto $(x,y) = (0,0)$.
A curva de nível l, onde $l < -3$, é o conjunto vazio ♣

4. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \frac{1}{2}, \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Compute, se existir,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

(b) Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

Solução.

(a) Dado $(x,y) \neq (0,0)$ temos

$$\frac{|x|y^2}{x^2+y^2} = |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x| \times 1 = |x|.$$

Donde segue

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |x| \text{ para todo } (x,y) \neq (0,0).$$

É claro que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0.$$

Então, pelo Teorema do Confronto segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(b) Para cada ponto (x_0, y_0) que não a origem, existe uma bola aberta B centrada neste ponto tal que a função f é dada por um quociente de dois polinômios, com o polinômio denominador não se anulando nos pontos desta bola aberta B. Como polinômios são funções contínuas e divisão de funções contínuas são funções contínuas, concluímos que a função $f = f(x,y)$ é contínua em cada ponto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
Na origem $(0,0)$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \text{ e } f(0,0) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a função $f = f(x,y)$ não é contínua na origem.
O conjunto dos pontos de continuidade de f é

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \clubsuit$$