CÁLCULO II

Bacharelado Oceanografia - 2º semestre de 2010

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Fundamentos de Análise Clássica:
o Supremo, Teoremas de Bolzano e Weierstrass e a Integrabilidade das Funções Contínuas

O que é uma derivada? Resposta: um limite.
O que é uma integral? Resposta: um limite.
O que é uma série infinita? Resposta: um limite.
O que é então um limite? Resposta: um número.
Muito bem! O que é então um número? [1]

Definição. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Então,

- O maior elemento de X, quando existe, é o **máximo** de X, indicado $\max X$.
- O menor elemento de X, quando existe, é o **mínimo** de X, indicado $\min X$.
- $M \in \mathbb{R}$ é um **majorante**, ou **cota superior**, de X se $x \leq M$, $\forall x \in X$.
- $m \in \mathbb{R}$ é um **minorante**, ou **cota inferior**, de X se $m \leq x$, $\forall x \in X$.

Exemplo 1. Consideremos os seguintes subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$(a)\ X = [0,1] \quad (b)\ X = (0,1) \quad (c)\ X = (-\infty,-2) \quad (d)\ X = (2,+\infty) \quad (e)\ X = \mathbb{Q} \cap (0,7)\ .$$

Analizando cada um dos casos acima encontramos para X:

(a) $\min X = 0$, $\max X = 1$, $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ minora } X\} = (-\infty,0]$ e $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [1,+\infty)$.

(b) $\nexists \min X$, $\nexists \max X$, $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ minora } X\} = (-\infty,0]$ e $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [1,+\infty)$.

(c) $\nexists \min X$, $\nexists \max X$, não admite minorante e $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ majora } X\} = [-2,+\infty)$.

(d) $\nexists \min X$, $\nexists \max X$, $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ minora } X\} = (-\infty,2]$ e não admite majorante.

(e) $\nexists \min X$, $\nexists \max X$, $\{M \in \mathbb{R} : M \text{ minora } X\} = (-\infty,0]$ e $\{m \in \mathbb{R} : m \text{ majora } X\} = [7,+\infty)$.

Definição. Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Então,

- O menor **majorante de** X, quando existe, é o **supremo** de X, indicado $\sup X$. Isto é,

$$\sup X = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ é majorante de } X\}\ .$$

- O maior **minorante de** X, quando existe, é o **ínfimo** de X, indicado $\inf X$. Isto é,

$$\inf X = \max\{m \in \mathbb{R} : m \text{ é minorante de } X\}\ .$$

[1] Vide Analysis by Its History, E. Hairer and G. Wanner, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, N. Y., 2000, p. 168.

Exemplo 2. Consideremos os seguintes subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$(a)\ X = [0,1] \quad (b)\ X = (0,1) \quad (c)\ X = (-\infty, -2) \quad (d)\ X = (2, +\infty) \quad (e)\ X = \mathbb{Q} \cap (0,7)\ .$$

Analizando cada um dos casos acima encontramos para X:

(a) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.

(b) $\inf X = 0$ e $\sup X = 1$.

(c) $\nexists \inf X$ e $\sup X = -2$.

(d) $\inf X = 2$ e $\nexists \sup X$.

(e) $\inf X = 0$ e $\sup X = 7$.

Definição. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então,

- X é **limitado superiormente** se X admite um majorante.
- X é **limitado inferiormente** se X admite um minorante.

A **Propriedade do Supremo** a seguir, enunciada por Bolzano[2] em 1817 [A History of Analysis, Hans Niels Jahnke, editor, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2003, p.175], é uma das mais fundamentais em matemática e é em alguns textos apresentada como um axioma [Elon Lages Lima, Um Curso de Análise, IMPA, 1976] e em outros é provado como um teorema [H. L. Guidorizzi, Um Curso de Cálculo, Vol 1, LTC Editora, Apêndice 6]. Neste texto apresentamos apenas seu enunciado e convidamos o leitor a consultar ao menos uma destas duas citadas obras.

(Propriedade do Supremo) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente admite supremo.

Corolário (Propriedade de Aproximação). Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $s = \sup X$. Se a é real e $a < s$, então existe $x \in X$ tal que

$$a < x \le s\ .$$

Prova. Como s é um majorante de X, temos $x \le s$, $\forall x \in X$. Assim, supondo que não exista x em X tal que $a < x \le s$ temos $x \le a$, $\forall x \in X$, e portanto a é um majorante de X e $a < s$ $\lightning$

Analogamente à Propriedade do Supremo e seu corolário temos,

(Propriedade do Ínfimo) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente admite ínfimo..
Prova. Se X é o conjunto em questão, basta aplicar a Propriedade do Supremo ao conjunto $-X$ $\blacksquare$

A seguir veremos algumas das principais consequências da Propriedade do Supremo.

[2]B. Bolzano (1781-1848), padre tcheco, viveu em Praga e teve sua obra redescoberta e reconhecida postumamente em 1870.

Propriedade de Arquimedes. Se $x > 0$ e y são reais, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.
Prova. Suponhamos, por absurdo, que $nx \leq y$ para todo natural n. Então, o conjunto

$$X = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$$

é obviamente não-vazio e majorado por y e assim, pela Propriedade do Supremo, admite supremo. Seja $s = \sup X$. Notando que $x > 0$, o supremo é o menor dos majorantes e $s - x < s$, segue que $s - x$ não é um majorante de X e existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - x < mx$, o que implica $s < (m+1)x$ e $(m+1)x \in X$ $\lightning$

Corolário 1. O conjunto $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.
Prova. Dado $x \in \mathbb{R}$, pela Propr. de Arquimedes e como $1 > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = n.1 > x$ $\blacksquare$

Corolário 2 (Não há infinitésimos em $\mathbb{R}$). Para todo $x > 0$, existe um natural n tal que $\frac{1}{n} < x$.
Prova. Como $x > 0$, pela propriedade arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > 1$ e assim, $\frac{1}{n} < x$ $\blacksquare$

Teorema do Anulamento (Bolzano-Weierstrass) (1817).[3] Se $f; [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $f(a) < 0 < f(b)$, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.
Prova. O conjunto $X = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$ é tal que $a \in X$ e limitado superiormente por b. Logo, pela Propriedade do Supremo, existe $c = \sup X$ e $a \leq c \leq b$. Mostremos, aplicando o Teorema da Conservação do Sinal à função contínua f, que tanto $f(c) < 0$ como $f(c) > 0$ acarretam contradições.

Se $f(c) < 0$ temos $c < b$ e $f < 0$ em algum intervalo $[c, c+\delta) \subset [a,b]$, com $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Logo, existe $x \in [a,b]$ tal que $x > c$ e $f(x) < 0$ $\lightning$

Se $f(c) > 0$ temos $a < c$ e $f > 0$ em algum intervalo $(c-\delta, c] \subset [a,b]$, $\delta > 0$ e suficientemente pequeno. Porém, pela Propriedade de Aproximação, existe $x \in (c-\delta, c]$ tal que $f(x) < 0$ $\lightning$

Teorema do Valor Intermediário. Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ então, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \gamma$.
Prova. Se $f(a) < \gamma < f(b)$, aplicamos o Teor. de Bolzano-Weierstrass à função $g(x) = f(x) - \gamma$ $\blacksquare$

Definições. Uma **sequência** em $\mathbb{R}$ é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, indicada $x = (x_n)$, com $x_n = x(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Indicamos então, $(x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ e ainda, $(x_n) = (x_n)_{\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainda mais,

- Se $\{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, $(x_{n_k}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$ é uma **subsequência** da sequência (x_n).

- (x_n) é uma **sequência crescente [descrescente]** se $x_n \geq x_m$ $[x_n \leq x_m]$ para todo $n \geq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Notemos que toda subsequência é uma sequência.

[3] Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.

Exemplos 3. Temos, em $\mathbb{R}$, os exemplos abaixo de sequências e subsequências.

- Se $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $(x_n) = (1, 2, 3, ...)$ é a sequência estritamente crescente dos naturais.
- Se $y_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, então (y_n) é a subsequência dos pares da sequência dos naturais.
- Se $r \in \mathbb{R}$ e $s_n = 1 + r + r^2 + ... + r^n$, $n \in \mathbb{N}$, então (s_n) é a sequência das somas finitas das progressões geométricas de razão r, de 1 a r^n.
- Se $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, então $(x_n) = (\frac{1}{n})$ é a sequência dos inversos dos naturais.
- Se $x_n = \sqrt[n]{n}$ então $(x_{2n+1}) = (\sqrt[2n+1]{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência da sequência $(\sqrt[n]{n})$.

Lema. Toda sequência (x_n) admite ou uma subsequência crescente ou uma subsequência decrescente.
Prova. Chamemos n de um "ponto de pico" da sequência (x_n) se $x_m < x_n$ para todo $m > n$.

Se (x_n) tem uma quantidade infinita de pontos de pico, $\{n_1 < n_2 < ...\}$, então a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente pois temos $x_{n_1} > x_{n_2} > ...$.

Se (x_n) tem uma quantidade finita de pontos de pico, seja n_1 um natural estritamente maior que todos os pontos de pico de (x_n). Como n_1 não é um ponto de pico então existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$ e, como n_2 também não é ponto de pico segue que existe $n_3 > n_2$, $n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$. Iterando, obtemos uma subsequência crescentede (x_n) ■

Definições. Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$. Dizemos que a sequência (x_n)

- **converge a** $L \in \mathbb{R}$ se $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$ se $n \geq n_0$. Notação: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$.
- **diverge a** $+\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ se $n \geq n_0$. Notação: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.
- **diverge a** $-\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < M$ se $n \geq n_0$. Notação: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$.
- **diverge** se não existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$.

Exemplos 4. Temos, em $\mathbb{R}$, os exemplos abaixo de sequências convergentes e divergentes.

- Se $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
- Se $|r| < 1$ e $s_n = 1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{1 - r}$.
- Se $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Se $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Lema. Se (x_n) é crescente [decrescente] e limitada então (x_n) é convergente.
Prova. Como $(-x_n)$ é crescente se (x_n) é decrescente basta supormos (x_n) crescente. Então, pela Propriedade do Supremo existe $\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq \alpha$ e, como (x_n) é crescente, se $n \geq n_0$ temos $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \alpha$, o que implica $|x_n - \alpha| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ ■

Teorema. Toda sequência limitada admite ao menos uma subsequência convergente.

Prova. Segue dos dois lemas anteriores ■

Proposição. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e (x_n) é uma sequência contida em X e convergente a $x_0 \in X$ então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ converge a $f(x_0)$.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ e então, $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ ■

Teorema da Limitação. Se f é contínua em $[a,b]$ então f é limitada.

Prova. Por contradição. Bisectando[4] $I_1 = [a,b]$ seja I_2 um dos subintervalos $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$ em que f não é limitada (existe ao menos um). Repetindo o argumento, bisectamos I_2 e selecionamos I_3 um subintervalo desta bisecção, no qual f não é limitada. Iterando tal processo obtemos uma sequência de **intervalos encaixantes** $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = [x_n, y_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$, satisfazendo $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$, $n \geq 1$.

A sequência (x_n) é crescente e a sequência (y_n) é decrescente, ambas em $[a,b]$. Temos $x_n \leq y_m$ se $n, m \in \mathbb{N}$ [se $m \leq n$ temos $x_n \leq y_n \leq y_m$ e, se $m \geq n$, $x_n \leq x_m \leq y_m$]. Pelas Propriedades do Supremo e do Ínfimo, (x_n) converge a $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e (y_n) converge a $y = \inf\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ e, ainda, $x_n \leq x \leq y \leq y_n$ [pois, $x_n \leq y_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, e fixo $m \in \mathbb{N}$ da definição de supremo segue $x \leq y_m$, para m arbitrário, e da definição de ínfimo segue $x \leq y \leq y_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$]. Desta forma temos $0 \leq y - x \leq \frac{b-a}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e portanto, como $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, pelo Teorema do Confronto segue $y - x = 0$ e $x = y$.

Como f é contínua, existe um intervalo $(x-\delta, x+\delta)$, $\delta > 0$, em que f é limitada. Porém, tal intervalo contém algum intervalo I_n no qual f é não limitada $\lightning$

Teorema de Weierstrass. Se f é contínua em $[a,b]$ então existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\,, \forall x \in [a,b]\,.$$

Prova. Como $X = \{f(x); x \in [a,b]\} = f([a,b])$ é limitado, pelas Propriedades do Supremo e do Ínfimo existem $M = \sup X$ e $m = \inf X$. Mostremos que $M \in f([a,b])$ (a prova para m é análoga).

Se $f(x) < M$, $\forall x \in [a,b]$, então temos $0 < g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$, $\forall x \in [a,b]$, e g é contínua e, pelo Teorema da Limitação, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \frac{1}{M-f(x)} < \beta$ e, portanto, $M - f(x) > \frac{1}{\beta}$, o que implica $f(x) < M - \frac{1}{\beta}$, $\forall x \in [a,b]$, e assim sendo M não é supremo de X $\lightning$

Para provarmos que funções contínuas em $[a,b]$ são integráveis, recordemos a definição de integral.

Definição. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $P = \{x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b\}$ uma **partição** de $[a,b]$ e uma **escolha**, subordinada à partição P, $\mathcal{E} = \{c_i : c_i \in [x_{i-1}, x_i]\,, \forall\, i = 1, ..., n\}$, a **soma de Riemann** de f em relação à partição P e à escolha $\mathcal{E}$ é:

$$S(f; P; \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,, \quad \text{com} \quad \Delta x_i = (x_i - x_{i-1})\,.$$

A **norma** de P é $|P| := \max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq n\}$ e $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, é um subintervalo determinado por P.

[4] Raciocícios por biecção foram muito utilizados por Bolzano e também se encontram em Elementos, Euclides, Livro X.

Definição. Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dizemos que f é **Riemann-integrável**, ou simplesmente **integrável**, se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo: para toda partição P de $[a,b]$ com norma $|P| < \delta$, para qualquer que seja a escolha $\mathcal{E}$ subordinada à partição P temos

$$\left| S(f; P; \mathcal{E}) - L \right| < \epsilon .$$

Notações: Escrevemos então,

$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i = L \quad \text{e}$$

$$L = \int_a^b f(x)\, dx .$$

O número $\int_a^b f(x)\, dx$ é chamado de **integral de f em** $[a,b]$.

No que segue mantemos a notação acima. Se f é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Weierstrass f é limitada em $[a,b]$ e podemos introduzir os conceitos a seguir.

Definição. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ é uma partição de $[a,b]$, a **soma inferior** e a **soma superior**[5] de f em relação à partição P são, respectivamente,

$$\underline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \,, \quad m_i = \min\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \,\} \quad \text{e}$$

$$\overline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \,, \quad M_i = \min\{\, f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \,\} \quad .$$

A seguir, utilizando uma idéia que remonta a Arquimedes, mostraremos que o existem o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores e que estes são iguais e então que f é integrável.

Notação: Se $A \subset [a,b]$ então $\min\limits_A f := \min\{f(x) : x \in A\}$ e $\max\limits_A f := \max\{f(x); x \in A\}$.

Observação 1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Valem as propriedades abaixo.

(a) Se I e J são subintervalos de $[a,b]$ e $I \subset J$ então,

$$\min_J f \le \min_I f \le \max_I f \le \max_J f \; .$$

(b) Se P_1 e P_2 são partições de $[a,b]$ então, ordenando $P_1 \cup P_2$ este é também uma partição de $[a,b]$.

(c) Se P_1 e P_2 são partições de $[a,b]$ então

$$\underline{S}(f; P_1) \le \underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \le \overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \le \overline{S}(f; P_2) \; .$$

(d) Se P é uma partição de $[a,b]$ e $\mathcal{E}$ é uma escolha qualquer subordinada à partição P então,

$$\underline{S}(f; P) \le S(f; P; \mathcal{E}) \le \overline{S}(f; P) \; .$$

[5]Estes conceitos foram introduzidos pelo mateemático francês G. Darboux (1842-1917)

Prova.

(a) Trivial.

(b) Óbvio.

(c) Se $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, é um subintervalo determinado pela partição P_1 então I_i é a reunião dos subintervalos $J_j = [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, ..., N$, $N \geq n$, determinados pela partição $P_1 \cup P_2$ que estão contidos em I_i. Desta forma, pelo ítem (a) temos,

$$(\min_{I_i} f)\,\Delta x_i \;=\; (\min_{I_i} f) \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \Delta y_j \;\leq\; \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} (\min_{J_j} f)\,\Delta y_j \;\text{ e}$$

e

$$\sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} (\max_{J_j} f)\,\Delta y_j \;\leq\; (\max_{I_i} f) \sum_{j\,:\,J_j \subset I_i} \Delta y_j \;=\; (\max_{I_i} f)\,\Delta x_i \,.$$

Então, destacando o 1º e o 3º termos das equações acima e somando para $i = 1, ..., n$ obtemos

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \underline{S}(f; P_1 \cup P_2)$$

e

$$\overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1)$$

e, por analogia, $\overline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_2)$. Como $\underline{S}(f; P_1 \cup P_2) \leq \overline{S}(f; P_1 \cup P_2)$, provamos (c).

(d) Evidente ■

Proposição. Se f é contínua em $[a, b]$ então existem

$$\alpha = \sup\left\{\underline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b]\right\} \quad \text{e} \quad \beta = \inf\left\{\overline{S}(f; P) : P \text{ é partição de } [a, b]\right\}$$

e, ainda, temos $\alpha \leq \beta$.

Prova. Sejam P_1 e P_2 duas partições arbitrárias de $[a, b]$. Pela Observação 1(c) temos,

$$\underline{S}(f; P_1) \leq \overline{S}(f; P_2)\,.$$

Assim, fixo P_2 o conjunto $\left\{\underline{S}(f; P_1) : P_1 \text{ é partição de } [a, b]\right\}$ é não vazio e majorado por $\overline{S}(f; P_2)$. Logo, temos $\alpha \leq \overline{S}(f; P_2)$ e, como esta desigualdade é válida para toda partição P_2 de $[a, b]$ segue que α é um minorante do conjunto $\{\overline{S}(f; P_2) : P_2 \text{ é partição de } [a, b]\}$ e portanto concluímos $\alpha \leq \beta$ ■

Proposição. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in X$ e (x_n) é uma sequência contida em X e convergente a $x_0 \in X$ então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ converge a $f(x_0)$.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in X$. Como $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_0| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ e então, $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ se $n \geq n_0$ ■

Definição. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, é uniformemente contínua se $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se}\, x, y \in X \text{ então}: \; |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\,.$$

Teorema (Heine, 1872).[6] Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f é uniformemente contínua.

Prova. Por contradição. Caso contrário, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que se $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, existem x_n e y_n em $[a,b]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$. Sendo limitada, (x_n) admite subsequência convergente (x_{n_k}) e reenumerando esta se necessário supomos, sem perda de generalidade, (x_n) convergente a x. Notemos que como temos $a \leq x_n \leq b$, $n \in \mathbb{N}$, segue que $x \in [a,b]$. Ainda mais, como $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que também (y_n) também converge a x. Portanto, $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$ ↯

Teorema. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f é integrável.

Prova. Dado $\epsilon > 0$, como f é uniformemente contínua, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Seja $P = \{x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$ com norma $|P| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i < \delta$. Então, se m_i e M_i são, respectivamente, o mínimo e o máximo de f em $[x_{i-1}, x_i]$ temos

$$0 \leq \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \epsilon\,.$$

Como $\underline{S}(f;P) \leq \alpha \leq \beta \leq \overline{S}(f;P)$, onde α é o supremo do conjunto das somas inferiores de f e β é o ínfimo do conjunto das somas superiores de f, ambas relativas às partições de $[a,b]$, temos

$$0 \leq \beta - \alpha \leq \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) < \epsilon$$

e, como ϵ é arbitrário, $\alpha = \beta$. Seja $L = \alpha$. Se $\mathcal{E}$ é uma escolha qualquer relativa a P, pela Obs. 1(d) temos

$$S(f;P;\mathcal{E}) \leq \overline{S}(f;P) = \underline{S}(f;P) + [\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)] < \alpha + \epsilon = L + \epsilon \quad \text{e}$$

$$L - \epsilon = \beta - \epsilon < \overline{S}(f;P) - [\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)] = \underline{S}(f;P) \leq S(f;P;\mathcal{E})\,,$$

donde segue $L - \epsilon < S(f;P;\mathcal{E}) < L + \epsilon$, para toda partição P tal que $|P| < \delta$, qualquer que seja a escolha $\mathcal{E}$ relativa à partição P. Logo, f é integrável e a integral de f é $L = \alpha = \beta$. Isto é,

$$\int_a^b f(x)dx = \sup\left\{\underline{S}(f;P) :\ P \text{ é partição de } [a,b]\right\} = \inf\left\{\overline{S}(f;P) :\ P \text{ é partição de } [a,b]\right\} \quad \blacksquare$$

Referências.

1. Fitzpatrick, P. M., Advanced Calculus, Pure and Applied Undergrad. Texts, 2nd. ed., AMS, 2009.
2. Guidorizzi, Um Curso de Cálculo, Vol 1, 5ª edição, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.
3. Hairer, E. and Wanner, G., Analysis by Its History, UTM, Springer, New York, 1996.
4. Jahnle, H. N., editor, A History of Analysis, American Mathematical Society, 2003.
5. Lima, E. L., Curso de Análise, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
6. Spivak, M., Calculus, 4th edition, Publish or Perish, Inc., Houston, 2008.

[6] Heinrich Eduard Heine (1821-1881), matemático alemão.