$2^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo II para Oceanográfico - MAT145
27/10/2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : ____________________GABARITO____________________
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens

1. Dê exemplos de funções $f : I\!\!R^2 \to I\!\!R$ tais que (verifique o que afirmar):
   a) f é contínua em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.
   b) f admite derivadas parciais em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.
   c) f tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ mas não é aí diferenciável.
   d) existem as derivadas direcionais $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}$, $\forall \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{v}\ .$$

Resolução:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, cujo gráfico é um cone, é contínua pois é a composição da função contínua raíz quadrada $\sqrt{.}\ : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ com o polinômio em duas variáveis $P : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$ definido por $P(x,y) = x^2+y^2$.
Mas, f não tem derivadas parciais na origem pois $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ não existe e $f_y(0,0)$ também não. Logo, f não é diferenciável na origem pois funções diferenciáveis num ponto admitem derivadas parciais neste ponto.

(b) A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$ pois temos

$$f(t,t) = \frac{1}{2} \ \text{ se } t \neq 0\ ,$$

e não temos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, que é a condição para f ser contínua na origem.
Entretanto, f admite derivadas parciais na origem já que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

e, analogamente, $f_y(0,0) = 0$.

(c) Dada a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0\,, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para que f seja diferenciável investiguemos se o limite abaixo é ou não zero:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\ .$$

Restringindo o cômputo do limite acima sobre a reta $k=h$ obtemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,h)-0}{\sqrt{h^2+h^2}}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3}{2h^2\sqrt{2h^2}}\ =\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{h}{|h|}\,,$$

o qual não existe e consequentemente f não é diferenciável na origem.

(d) Dada a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0\,, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e uma direção $\vec{v}\,\langle a,b\rangle$, $|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}=1$, investiguemos a existência da derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)$ computando o limite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{ta(tb)^2}{t^2a^2+t^2b^2}-0\right]=\lim_{t\to 0}ab^2=ab^2\ .$$

Logo, existe a derivada direcional de f na origem em todas as direções.
Entretanto f não é diferenciável pois

- pela fórmula acima temos $f_x(0,0)=0$ e $f_y(0,0)=0$,
- se f é uma função arbitrária diferenciável na origem sabemos que é então válida a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=\overrightarrow{\nabla}f(0,0)\cdot\overrightarrow{v}\ .$$

Assim, se a função f acima dada fosse diferenciável na origem teríamos $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=\overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{v}=0$, para todo vetor unitário $\overrightarrow{v}$, o que evidentemente não ocorre para todos os versores já que a fórmula para a as derivadas direcionais é $\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}(0,0)=ab^2$, a qual não se anula em todos os versores ■

2. Um ponto P descreve uma trajetória sobre o gráfico de $f(x,y) = 4x^2 + y^2$. Sabe-se que a reta tangente em cada ponto da trajetória forma com o plano xy ângulo máximo. Determine uma parametrização para a trajetória admitindo que ela passe pelo ponto $(1,1,5)$.

   Resolução:

   A curva $\gamma = \gamma(t)$ descrita pela projeção da trajetória de P sobre o plano Oxy é tal que seu vetor tangente no ponto $\gamma(t)$ tem a direção e o sentido do vetor que indica a direção e o sentido do maior crescimento da função f no ponto $\gamma(t)$, o qual é o vetor gradiente de f no ponto $\gamma(t)$.

   Assim, escrevendo $\gamma(t) = (\, x(t)\,, y(t)\,)$ temos,

$$\gamma'(t) \ \text{ paralelo a } \ \vec{\nabla} f(\,\gamma(t)\,)$$

   e então, como

$$\begin{cases} \gamma'(t) & = (\, x'(t)\,, y'(t)\,) \\ \vec{\nabla} f(x,y) & = (8x, 2y) \\ \vec{\nabla} f(\,\gamma(t)\,) & = (\, 8x(t), 2y(t)\,) \end{cases}$$

   temos

$$\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ 8x(t) & 2y(t) \end{vmatrix} = 0$$

   e portanto,

$$2x'(t)y(t) = 8y'(t)x(t) \ .$$

   Admitindo que o intante inicial corresponde a $t = 0$ e que a posição inicial é $(1,1)$, já que o ponto P passa por $(1,1,4)$, podemos supor (t) e $y(t)$ não zero para t suficientemente pequeno e podemos escrever

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 4\frac{y'(t)}{y(t)}$$

   queintegrando nos fornece

$$\ln|x(t)| = 4\ln|y(t)| + C \,, \quad C \ \text{ alguma constante rel .}$$

   Como $x(0) = y(0) = 1$ obtemos $C = 0$. Assim encontramos a relação

$$x(t) = \pm y^4(t) \ .$$

   Podemos então adotar, entre infinitas opções,

$$\gamma(t) = (t^4, t) \ \text{ ou } \ \gamma(t) = (e^{4t}, e^t) \quad .$$

   Finalmente, podemos descrever a trajetória como

$$(\, t^4\,, t\,, 4t^8 + t^2\,) \quad \text{ou} \quad (\, e^{4t}\,, e^t\,, 4e^{8t} + e^{2t}\,) \ \blacksquare$$

3. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, isto é, f e suas derivadas de ordem menor ou igual a 2 são contínuas. Fixados $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{v} = \langle h, k \rangle$ um vetor em $\mathbb{R}^2$, considere

$$\varphi(t) = f(a+th, b+tk) \ .$$

Calcule $\varphi''(t)$.

Resolução:

Pela regra da cadeia temos,

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)k$$

e então, aplicando o mesmo processo nas duas parcelas acima no 2º membro,

$$\varphi''(t) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a+th, b+tk)h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th, b+tk)k \right] h \ +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk)h + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(a+th, b+tk)k \right] h \ .$$

Finalmente, pelo Teorema de Schwarz, como f é de classe C^2 as derivadas mistas de 2ª ordem comutam:$f_{xy} = f_{yx}$, e obtemos

$$\varphi''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk)k^2$$

ou, em notação sucinta,

$$\varphi'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 \ + \ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk \ + \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2 \quad \blacksquare$$

4. Determine a equação do plano tangente e da reta normal à superfície dada no ponto dado:
$$z \cdot e^{x-y} + z^3 = 2 \ \text{ em } \ (2,2,1) \ .$$

Resolução:

O vetor normal ao plano tangente é também o vetor normal à superfície de nível 2 da função $F(x,y,z) = z \cdot e^{x-y} + z^3$ no ponto $(2,2,1)$, o qual é o gradiente

$$\vec{\nabla} F|_{(2,2,1)} = \left\langle ze^{x-y} \, , -ze^{x-y} \, , e^{x-y} + 3z^2 \right\rangle|_{(2,2,1)} = \langle 1 \, , -1 \, , 4 \rangle \qquad .$$

Assim, o plano tangente desejado é

$$\pi : (x-2) - (y-2) + 4(z-1) = 0 \ ,$$

e a reta normal é

$$N : (x,y,z) = (2,2,1) \ + \ t \, \langle 1, -1, 4 \rangle \ , \ t \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

5. Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico passa pelo ponto $(1, 2, 1)$ e tal que

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left\langle 2xy^3 - 2x, 3x^2y^2 + 2y - 1 \right\rangle \ .$$

Resolução:
Devemos ter $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 - 2x$ [e $f_y = 3x^2y^2 + 2y - 1$] e portanto

$$f(x,y) = x^2y^3 - x^2 + \varphi(y)\,,$$

φ uma função arbitrária na variável y. Então temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y - 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + \varphi'(y)$$

e consequentemente a função φ satisfaz

$$\varphi'(y) = 2y - 1$$

e assim a função φ é dada por

$$\varphi(y) = y^2 - y + c\,, \quad c \ \text{ uma constante real }.$$

Logo, a função f satisfaz

$$f(x,y) = x^2y^3 - x^2 + y^2 - y + c\,, \quad \text{com } f(1,2) = 1$$

o que implica $1 = 8 - 1 + 4 - 2 + c$ e portanto $c = -8$.

Resposta Final: $f(x,y) = x^2y^3 - x^2 + y^2 - y - 8 \quad \blacksquare$

6. Determine a equação do plano normal em $(1,2,3)$ à intersecção das superfícies $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 14$ e $S_2 : xyz = 6$.

Resolução:

Sejam π_1 e π_2 os planos tangentes à superfícies S_1 e S_2 no ponto $(1,2,3)$, respectivamente. Seja ainda π_N o plano normal a π_1 e π_2.

Como S_1 é a superfície de nível 1 da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e S_2 é a superfície de nível 6 da função $g(x,y,z) = xyz$, segue que os vetores normais aos planos π_1 e π_2 são, respectivamente,

$$\vec{n}_{\pi_1} = \vec{\nabla} f(1,2,3) = \langle 2,4,6 \rangle \qquad \text{e} \qquad \vec{n}_{\pi_2} = \vec{\nabla} g(1,2,3) = \langle 6,3,2 \rangle \ .$$

Então, um vetor normal ao plano π_N é

$$\vec{n}_{\pi_N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 32\vec{j} - 18\vec{k} \ .$$

Consequentemente a equação do plano normal desejado é

$$\pi_N : -5(x-1) + 16(y-2) - 9(z-3) = 0 \qquad \blacksquare$$

7. Seja $f(x,y)$ diferenciável em $I\!R^2$ e homogênea de grau λ. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau $\lambda - 1$.

Resolução:

Por hipótese temos

$$f(tx,ty) = t^{\lambda} f(x,y)\,, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \forall t > 0\ .$$

Sendo f diferenciável, derivando a igualdade acima em relação a x obtemos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)t = t^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \forall t > 0$$

e portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = t^{\lambda-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \forall t > 0\ ,$$

o que implica que $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ é homogênea de grau $\lambda - 1$ ■