$1^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo II para Oceanográfico - MAT145

2^o semestre de 2010

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Total	

Nome : GABARITO
$N^{\underline{o}}$USP :
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens

1. Determine a equação do plano contendo os pontos $(3,-1,2)$, $(8,2,4)$ e $(-1,-2,-3)$.

   Resolução:

   Uma equação vetorial do plano é

$$\pi : (x,y,z) = (3,-1,2) + s\,\langle 5,3,2\rangle + t\,\langle -4,-1,-5\rangle \ , \quad s,t \in \mathbb{R} \ \blacksquare$$

2. Verifique se as retas abaixo são reversas ou não e compute a distância entre elas.

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad \text{e} \qquad L_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3} \ .$$

Resolução:

Sejam $A = (1,3,2) \in L_1$, $B = (2,5,-2) \in L_2$ e os vetores diretores

$$\overrightarrow{v_{L_1}} = \langle 2,2,1 \rangle \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v_{L_2}} = \langle 1,-1,3 \rangle$$

e seu produto vetorial $\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}}$. A distância d entre L_1 e L_2 é comprimento da projeção de $\overrightarrow{AB} = \langle 1,2,-4 \rangle$ sobre o versor $\frac{\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}}}{|\,\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}}\,|}$. Isto é,

$$d = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}}}{|\,\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}}\,|} \ .$$

Efetuando os cômputos necessários temos,

$$\overrightarrow{v_{L_1}} \times \overrightarrow{v_{L_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k} \ .$$

Logo,

$$d = \frac{1}{\sqrt{25+49+16}}[\,1(-5) + 2.7 + (-4).(-4)\,] = \frac{25}{\sqrt{90}} \quad \blacksquare$$

3. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) f é contínua em $(0,0)$?

b) Calcule as derivadas parciais de f em todos os pontos, inclusive a origem, se existirem.

c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

d) f é diferenciável em $(0,0)$?

Resolução:

(a) Temos $f(x,0) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0,y) = -1$ se $y \neq 0$. Logo, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e portanto f não é contínua na origem.

(b) Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-0}{x}, & \text{não existe se } (x,y) = (0,0) \\ \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-1-0}{y-0}, & \text{não existe se } (x,y) = (0,0) \\ \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\ . \end{cases}$$

(c) Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f é uma função racional cujo denominador não se anula e portanto f admite derivadas parciais de todas as ordens em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e é, em particular, diferenciável.

(d) f não é dferenciável em $(0,0)$ pois não é contínua em $(0,0)$ $\blacksquare$

4. Dado $w = w(x, y) = xy + \operatorname{arctg} \mathrm{x}$, $x = e^{st}$, $y = st$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $s = 0$ e $t = 1$.

Resolução:

Escrevendo w nas variáveis s e t obtemos

$$w(s, t) = e^{st} st + \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{\mathrm{st}} \ .$$

Logo,

$$\begin{cases} w_s = & e^{st} st^2 + e^{st} t + \frac{1}{1+e^{2st}} e^{st} t \\ w_t = & e^{st} s^2 t + e^{st} s + \frac{1}{1+e^{2st}} e^{st} s \end{cases} \quad \blacksquare$$

5. Determine o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$.

Resolução:

Um vetor normal ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é

$$\vec{n} = \langle f_x(x_0, y_0)\,, f_y(x_0, y_0)\,, -1\rangle = \langle 2x_0\,, 2y_0\,, -1\rangle \ .$$

Tal vetor deve ser paralelo ao vetor $\langle 2, 1, -1\rangle$, normal ao plano dado.

Assim temos:

$$\langle 2x_0, 2y_0, -1\rangle = \langle 2, 1, -1\rangle$$

e obtemos $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$ e o plano:

$$\pi : 2(x-1) + 1(y - \frac{1}{2}) - (z - \frac{5}{4}) = 0 \quad \blacksquare$$

Note que $f(1\,, 1/2) = 5/4$.

6. Esboce e identifique a superfície $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

   Resolução:

   Resolvido na seção dúvidas.

7. Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico de $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Resolução:

Notando que $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ obtemos $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, que é a equação da esfera de raio 1 centrada na origem de $\mathbb{R}^3$. Asim, o gráfico de $z = f(x, y)$ é o hemisfério superior de tal esfera.

As curvas de nível $z = f(x, y) = c$, c uma contante real, são circunferências centradas na origem $\blacksquare$