

**MÁXIMOS E MÍNIMOS CONDICIONADOS E
MULTIPLICADORES DE LAGRANGE**

Definições: Seja $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. O ponto $P_o \in \text{Dom}(f)$ é:

- **Ponto crítico** ou **estacionário** de f se $\vec{\nabla} f(P_o) = \vec{0}$.
- **Ponto de máximo [mínimo] local** de f se existe uma bola aberta $B_r(P_o)$, de centro P_o e raio $r > 0$, tal que $f(P_o) \geq f(P)$ [$f(P_o) \leq f(P)$], $\forall P \in B_r(P_o) \cap \text{Dom}(f)$.
- **Um extremante local** de f se é ponto de máximo local, ou mínimo local, de f .
- Um **extremante local de f em $A \subset \text{Dom}(f)$** , se $P_o \in A$ é ponto de máximo local, ou mínimo local, de f **restrita a A** .

Nestas notas Ω indica sempre um aberto, de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 .

Teorema 1 Sejam $f, g \in C^1(\Omega)$ e $L = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$, $\vec{\nabla} g(x, y) \neq \vec{0}$, $\forall (x, y) \in L$. Então, se $P_o = (x_o, y_o) \in L$ é máximo, ou mínimo, local de f em L , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(*) \quad \vec{\nabla} f(P_o) = \lambda \vec{\nabla} g(P_o).$$

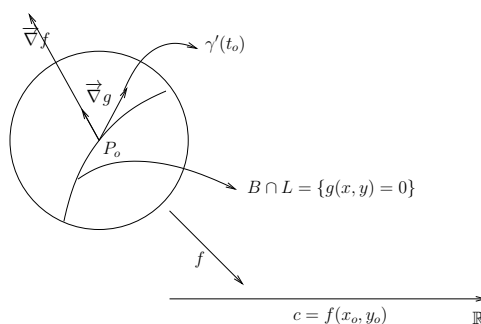


Figura 1: Teorema de Lagrange no Plano

Idéia (vide Figura 2-A): Se $\vec{\nabla} f(P_o) \neq \vec{0}$ é oblíquo a L em P_o , a curva C de nível $f(P_o)$, de f , cruza L e as de nível c , de f , $c \approx f(P_o)$, com gráficos próximos a C , também cruzam L e, orientando-as na direção (gradiente) de crescimento de c vemos que P_o não é máximo, nem mínimo, local de f em L , contra a hipótese. Portanto $\vec{\nabla} f(P_o)$ é ortogonal a L , assim como $\vec{\nabla} g(P_o)$, e conseqüentemente paralelo a $\vec{\nabla} g(P_o)$.

Prova: Localmente, em P_o , L é uma curva $\gamma(t)$, t numa vinhança de zero, $\gamma(0) = P_o$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$ [v. Teor. 1 das Funções Implícitas]. Assim, $(f \circ \gamma)(t)$ têm extremante em $t = 0$, $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ e, pela regra da cadeia, $\vec{\nabla} f(P_o) \perp \gamma'(0)$. Porém, $g \circ \gamma \equiv 0$, $\vec{\nabla} g(P_o) \perp \gamma'(0)$ e, $\gamma'(0) \neq \vec{0}$ e $\vec{\nabla} g(P_o) \neq \vec{0}$. Donde, $\vec{\nabla} f(P_o)$ é paralelo a $\vec{\nabla} g(P_o)$ e, a tese ■

Interpretações: A idéia dada na prova do Teorema 1 é representada na Figura 2-B. Completando-a, na Figura 2-A representamos as curvas de nível $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 = f(x_0, y_0) = f(P_0)$ no sentido de crescimento do gradiente de f (pois f cresce na direção do gradiente). É claro que o valor máximo de f sobre a curva $L : g(x, y) = 0$, corresponde ao maior valor c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepta a curva L . Em tal ponto P_0 de intersecção tais curvas tem mesma reta tangente e assim mesma reta normal, as quais a priori tem direção $\vec{\nabla} f(P_0)$ e $\vec{\nabla} g(P_0)$ (Figura 2-B), respectivamente. Logo, tais vetores são paralelos e $\vec{\nabla} f(P_0)$ é um “múltiplo” de $\vec{\nabla} g(P_0)$ já que este é não nulo.

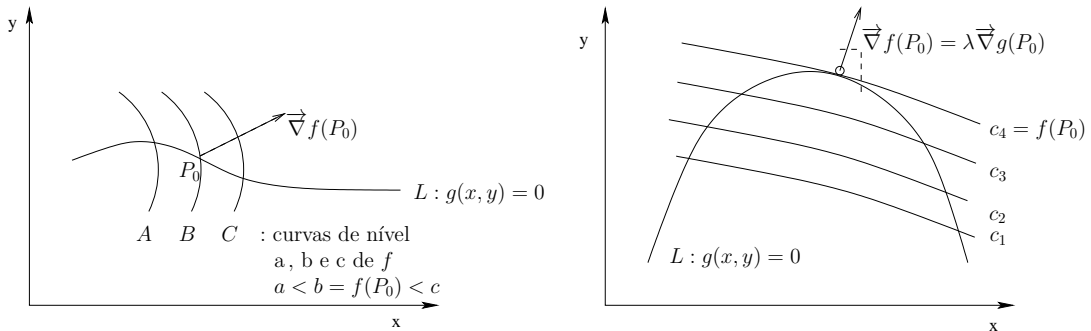


Figura 2: Duas interpretações, complementares, para o Teorema de Lagrange no Plano

Observações: Mantenhamos a notação do teorema acima e sua demonstração.

- (1) Se P_o é ponto crítico de f e $\lambda = 0$, têm-se $\vec{\nabla} f(P_o) = \vec{0} = \lambda \vec{\nabla} g(P_o)$ porém, não existe λ tal que $\vec{0} \neq \vec{\nabla} g(P_o) = \lambda \vec{\nabla} f(P_o)$. Neste sentido a equação (*) é a melhor possível.
- (2) Pontos críticos de f pertencentes a L , são **candidatos** a extremantes locais de f restrita a L .
- (3) Se $\vec{\nabla} f \neq \vec{0}, \forall (x, y)$, localmente parametrizamos a curva de nível $c = f(P_o)$, de f , por uma curva δ , com $\delta' \neq \vec{0}$. Esta tem vetor tangente ortogonal a $\vec{\nabla} f(P_o)$. Logo, $\delta'(P_o) \perp \vec{\nabla} g(P_o)$. Assim, em P_o , δ' e γ' sendo não nulos e ortogonais a $\vec{\nabla} g(P_o)$, são múltiplos um do outro. Logo, as curvas $L = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ e a de nível $c = f(P_o)$ de f , tangenciam-se em P_o .
- (4) Os extremantes surgem do sistema abaixo com uma equação vetorial e outra escalar,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x, y) = \lambda \vec{\nabla} g(x, y) \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

equivalente ao que segue, com três equações escalares, nas três incógnitas x, y, λ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

(5) É possível eliminar o parâmetro λ trivialmente mas a conveniência depende do problema. A resolubilidade de $\vec{\nabla} f(P_o) = \lambda \vec{\nabla} g(P_o)$ equivale a de

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} (P_o) = 0.$$

A questão da determinação dos extremantes locais de f sobre $\{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ é usualmente referida como o problema da determinação dos máximos e mínimos de f sujeita à **restrição** $g(x, y) = 0$ ou, ainda, dos **máximos e mínimos condicionados de f** sujeita à **condição** $g(x, y) = 0$.

Para aplicarmos os multiplicadores de Lagrange são úteis os conceitos abaixo.

Definições topológicas: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, com $n = 1, 2, 3$.

- A é **fechado** se seu complementar é aberto.
- $A = K \subset \mathbb{R}^n$ é **compacto** se é fechado e limitado.

Segue, sem a demonstração, um resultado fundamental para estudo de máximos e mínimos.

Teorema (Weierstrass) Dada $f \in C(K)$, K compacto em \mathbb{R}^n , f assume valor máximo absoluto e mínimo absoluto em K . Isto é, existem P_1 e $P_2 \in K$ tais que

$$f(P_1) \leq f(X) \leq f(P_2), \quad \forall X \in K.$$

Exemplo 1: Determine a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + 16y^2$ que seja tangente à curva (um ramo de hipérbole) $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$ e também o ponto de tangência.

Resolução:

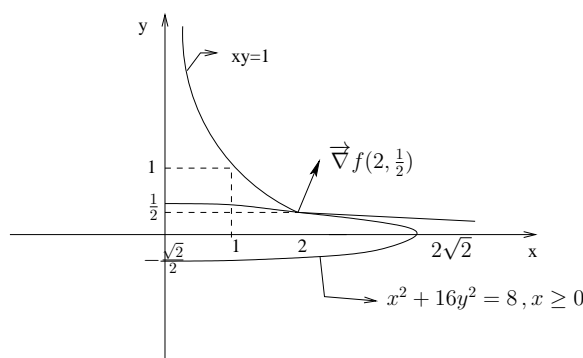


Figura 3: Ilustração para Exemplo 1

No ponto (x_o, y_o) em que as curvas se tangenciam seus vetores tangentes são paralelos e seus vetores normais também. O vetor normal à curva de nível é o gradiente $\vec{\nabla} f$ e o vetor

normal à hipérbole $xy = 1$ é o vetor gradiente de $g(x, y) = xy$, $\vec{\nabla}g(x_o, y_o) = \langle y_o, x_o \rangle$, que é não nulo pois $x_o y_o = 1$. Temos então, $\vec{\nabla}f(x_o, y_o) = \lambda \vec{\nabla}g(x_o, y_o)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e,

$$\langle 2x_o, 32y_o \rangle = \lambda \langle y_o, x_o \rangle ,$$

logo, $2x_o \cdot 32y_o = \lambda y_o \cdot \lambda x_o$ e, como $x_o y_o = 1$, obtemos $64 = \lambda^2$ e $\lambda = \pm 8$. Porém, como $x_o > 0$ e $y_o > 0$, a possibilidade $\lambda = -8$ é inaceitável. Assim temos, $x_o = 4y_o$ e portanto, $1 = x_o y_o = 4y_o^2$ e assim, $y_o = \frac{1}{2}$ e $x_o = 2$ e o ponto de tangência é

$$(x_o, y_o) = (2, \frac{1}{2}) ,$$

a curva de nível é a **elipse** dada pela equação $x^2 + 16y^2 = f(2, \frac{1}{2}) = 4 + 4 = 8$ ■

Exemplo 2: Analise os máximos e mínimos de $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$.

Resolução:

Se E é a elipse $E = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$ então $E = g^{-1}(0)$ e $\vec{\nabla}g = \langle 2x, 4y \rangle \neq \vec{0}$ sobre E . Como f é contínua e E é compacto, pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo sobre E . Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange nestes extremantes existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \vec{\nabla}f(x, y) = \lambda \vec{\nabla}g(x, y) \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle 2x - 2y, -2x + 6y \rangle = \lambda \langle 2x, 4y \rangle \\ x^2 + 2y^2 = 1 . \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro λ na primeira equação do sistema à direita temos,

$$\begin{vmatrix} 2x - 2y & 6y - 2x \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8y(x - y) - 4x(3y - x) = 0 .$$

Logo, dividindo a última equação à direita por 4 e então simplificando,

$$\begin{aligned} 2(xy - y^2) - (3xy - x^2) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{y}{2})^2 - (\frac{3y}{2})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2y)(x + y) = 0 . \end{aligned}$$

Assim, obtemos as asoluções $P = (2y, y)$ ou $Q = (-y, y)$. Como P e Q pertence à elipse temos

$$\begin{cases} (2y)^2 + 2y^2 = 1 \\ \text{ou} \\ y^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \text{ou} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \pm (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) \\ \text{ou} \\ Q = \pm (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) . \end{cases}$$

Computemos f em P e Q notando que $f(x, y) = (x - y)^2 + 2y^2$. Como $f(-x, -y) = f(x, y)$ temos,

$$\begin{aligned} f(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) &= f(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) = (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{6}})^2 = \frac{1}{2} \\ f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) &= f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 2 . \end{aligned}$$

Portanto, $\pm (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ são pontos de máximo e $\pm (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ são pontos de mínimo ■

Teorema 2 Sejam $f, g \in C^1(\Omega)$, $S = \{P = (x, y, z) \in \Omega \mid g(P) = 0\}$, uma superfície, com $\vec{\nabla}g(P) \neq \vec{0}, \forall P \in S$. Se $P_o = (x_o, y_o, z_o) \in S$ é extremante local de f sobre S , existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{\nabla}f(P_o) = \lambda \vec{\nabla}g(P_o) .$$

Idéia Análoga a dada no plano. Se $\vec{\nabla}f(P_o) \neq \vec{0}$ é oblíquo a S em P_o (i.e., ao plano π , tangente a S em P_o), a superfície S' de nível $f(P_o)$, de f , cruza S em P_o e as de nível c , de f , $c \approx f(P_o)$, também cruzam S e orientando-as na direção $\vec{\nabla}f(P_o)$, de crescimento de c , vemos que P_o não é extremante de f , contra a hipótese. Logo, $\vec{\nabla}f(P_o)$ é ortogonal a S , assim como $\vec{\nabla}g(P_o) \neq \vec{0}$ e portanto, $\vec{\nabla}f(P_o)$ é paralelo a $\vec{\nabla}g(P_o)$.

Prova:

Pelas hipóteses (vide Funções Implícitas, Teorema 2) S é localmente, em P_o , uma superfície $z = \varphi(t, s)$, (t, s) numa vizinhança de zero, $\varphi(0, 0) = P_o$. Logo, $(0, 0)$ é extremante de $f \circ \varphi$ e para toda curva γ no gráfico de φ , $Gr(\varphi)$, com $\gamma(0) = P_o$, $(f \circ \gamma)$ tem máximo ou mínimo em $t = 0$ e $\vec{\nabla}f(P_o) \perp \gamma'(0)$. Então, $\vec{\nabla}f(P_o)$ é ortogonal a π , o plano tangente a $Gr(\varphi)$ em P_o . Também $\vec{\nabla}g(P_o)$ é ortogonal a S , isto é, a π . Logo, os vetores gradiente $\vec{\nabla}f(P_o)$ e $\vec{\nabla}g(P_o)$ são paralelos e, como $\vec{\nabla}g$ não se anula, segue a tese ■

Obs 6: No Teorema 2 também é simples eliminar o parâmetro λ e, novamente, a conveniência depende do problema. A resolubilidade de $\vec{\nabla}f(P_o) = \lambda \vec{\nabla}g(P_o)$ equivale a de

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} (P_o) = \vec{0} .$$

Exemplo 3: Verifique que existe, e é único, um ponto P no plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias de P a $(0, 0, 0)$ e a $(1, 1, 1)$ seja mínima. Determine-o.

Resolução:

Geometricamente, se K é uma bola fechada que contém os pontos dados e intersecta o plano dado, o ponto procurado pertence a K e é então o mínimo absoluto da função $D(x, y, z) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$ restrita ao compacto K . O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo.

Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x, y, z)$ com a restrição $3x + 2y + z = 12$ satisfazem:

$$\vec{\nabla}D(x, y, z) = \lambda \langle 3, 2, 1 \rangle , \lambda \in \mathbb{R} ,$$

ou, eliminando o parâmetro λ ,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x + 2(x - 1) & 2y + 2(y - 1) & 2z + 2(z - 1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x - 1 & 2y - 1 & 2z - 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} .$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y - 1 - 4z + 2)\vec{i} - (2x - 1 - 6z + 3)\vec{j} + (4x - 2 - 6y + 3)\vec{k} = \vec{0}$ e portanto, $2y = 4z - 1$ e $x = 3z - 1$; donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z - 1) + (4z - 1) + z = 12$ e $z = \frac{16}{14}$, $y = \frac{25}{14}$ e $x = \frac{34}{14}$. Logo, o ponto procurado é $P_o = \left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14}\right)$.

Atenção: neste caso também podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x + 2(x - 1)}{3} = \frac{2y + 2(y - 1)}{2} = \frac{2z + 2(z - 1)}{1} \quad (= \lambda) \quad \blacksquare$$

Exemplo 4: Consideremos o plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

- (a) Determine o ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ no plano π mais próximo à origem.
 (b) Com o método em (a) mostre que a distância de todo ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ ao plano é:

$$\frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1ª Resolução:

- (a) Geometricamente sabemos que existe tal ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e que $P_1 = (0, 0, 0)$ se $d = 0$. Determinemos o mínimo da função $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância, sujeita à restrição $ax + by + cz + d = 0$. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla}\Phi(P_1) = \langle 2x_1, 2y_1, 2z_1 \rangle = \lambda \langle a, b, c \rangle.$$

Logo, $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = \frac{\lambda}{2} \langle a, b, c \rangle$ e, substituindo tais coordenadas para P_o na equação para π obtemos $0 = ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \frac{\lambda}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + d$ e portanto, $\frac{\lambda}{2} = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Assim, o ponto de π mais próximo à origem é:

$$P_1 = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} \langle a, b, c \rangle.$$

- (b) Geometricamente é claro que existe em π o ponto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ mais próximo de $P_o = (x_o, y_o, z_o)$. Este ponto P_2 é mínimo absoluto da função $\Psi(x, y, z) = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2$ restrita ao plano $ax + by + cz + d = 0$, que avalia o quadrado da distância dos pontos do plano π ao ponto P_o . Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla}\Psi(P_2) = \langle 2(x_2 - x_o), 2(y_2 - y_o), 2(z_2 - z_o) \rangle = \mu \langle a, b, c \rangle.$$

Logo, $\overrightarrow{P_o P_2} = \frac{\mu}{2} \langle a, b, c \rangle$ e a distância de P_2 a π , dada pelo módulo de $\overrightarrow{P_o P_2}$ é $\frac{|\mu|}{2} |\langle a, b, c \rangle|$. Por outro lado, como $P_2 = P_o + \frac{\mu}{2} \langle a, b, c \rangle$ pertence a π temos,

$$a(x_o + \frac{\mu}{2}a) + b(y_o + \frac{\mu}{2}b) + c(z_o + \frac{\mu}{2}c) + d = 0 \quad \text{ou,}$$

$$\frac{\mu}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_o + by_o + cz_o + d)$$

e, finalmente, a distância procurada é $\frac{|\mu|}{2} |\langle a, b, c \rangle| = \frac{\frac{|\mu|}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

2ª Solução (Geométrica, simples e não utilizando multiplicadores de Lagrange):

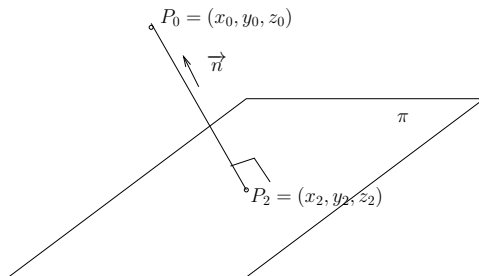


Figura 4: A distância de um ponto a um plano.

Se P_2 , pertencente a π , é o pé da perpendicular por P_o ao plano π temos que $\overrightarrow{P_oP_2}$ é paralelo ao vetor normal a π , $\vec{n}_\pi = \langle a, b, c \rangle \neq \vec{0}$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{P_oP_2} = \lambda \langle a, b, c \rangle$ e portanto a distância de P_o a π é $|\overrightarrow{P_oP_2}|$. Porém, de

$$P_2 = P_o + \overrightarrow{P_oP_2} = P_o + \lambda \langle a, b, c \rangle \quad ,$$

segue que

$$0 = a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c(z_0 + \lambda c) + d = 0,$$

e assim, $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$ e $\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. Donde,

$$|\overrightarrow{P_oP_2}| = |\lambda| |\langle a, b, c \rangle| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \blacksquare$$

Notação O produto vetorial do vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ pelo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, nesta ordem, é $\vec{u} \times \vec{v}$.

Na demonstração do teorema que segue utilizamos o elementar resultado: se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ e \vec{w} é ortogonal a $\vec{u} \times \vec{v}$ então \vec{w} é combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .

Teorema 3 Consideremos três funções $f, g, h \in C^1(\Omega)$, Ω contido em \mathbb{R}^3 , e a intersecção de superfícies $L = \{P = (x, y, z) \in \Omega \mid g(P) = 0 \text{ e } h(P) = 0\}$, satisfazendo:

$$\vec{\nabla}g(x, y, z) \times \vec{\nabla}h(x, y, z) \neq \vec{0}, \quad \forall (x, y, z) \in L.$$

Então, se $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ é um extremante local de f sobre L , existem λ_1 e λ_2 em \mathbb{R} tais que:

$$\vec{\nabla}f(P_o) = \lambda_1 \vec{\nabla}g(P_o) + \lambda_2 \vec{\nabla}h(P_o).$$

Prova:

Pelas hipóteses (vide o Teorema 3 das Funções Implícitas) L é localmente, em P_o , uma curva $\gamma = \gamma(t)$, $\gamma(0) = P_o$ e $\gamma'(0) \neq \vec{0}$. Como $\text{Im}(\gamma)$ está contida na superfície de nível zero de g , temos $\vec{\nabla}g(P_o)$ ortogonal a $\gamma'(0)$ e, analogamente, $\vec{\nabla}h(P_o)$ ortogonal a $\gamma'(0)$, vide Figura 5 a seguir. Logo, $\gamma'(0)$ é paralelo a $\vec{\nabla}g(P_o) \times \vec{\nabla}h(P_o)$.

Ainda, $(f \circ \gamma)(t)$ tem máximo, ou mínimo, local em $t = 0$ e $\vec{\nabla}f(P_o) \perp \gamma'(0) \neq \vec{0}$. Assim, temos $\vec{\nabla}f(P_o) \perp \vec{\nabla}g(P_o) \times \vec{\nabla}h(P_o)$ e, $\vec{\nabla}f(P_o)$ é combinação linear de $\vec{\nabla}g(P_o)$ e $\vec{\nabla}h(P_o)$ ■

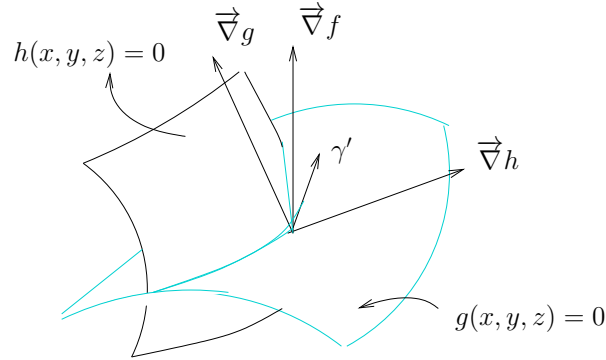


Figura 5: Ilustração ao Teorema 3.

Obs 7: Uma vez mais é elementar eliminar os parâmetros λ_1 e λ_2 e a conveniência é circunstancial. No Teorema 3, temos $\vec{\nabla} f(P_o) = \lambda_1 \vec{\nabla} g(P_o) + \lambda_2 \vec{\nabla} h(P_o)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} (P_o) = 0.$$

Obs 8. Os sistemas encontrados nos teoremas acima são redutíveis a uma única equação vetorial, eliminando equações de restrição e acrescentando variáveis. Para o Teorema 3, e analogamente para os demais, definimos a função \mathcal{L} em cinco variáveis livres (vide Exemplo 6, a seguir), ou **não condicionadas**,

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z).$$

As soluções do sistema mencionado são os pontos de máximo ou mínimo **não-condicionados** de \mathcal{L} , os quais se encontram entre seus (de \mathcal{L}) pontos críticos e satisfazem,

$$\vec{\nabla} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = \langle f_x - \lambda g_x - \mu h_x, f_y - \lambda g_y - \mu h_y, f_z - \lambda g_z - \mu h_z, -g, -h \rangle = \vec{0},$$

que é um problema sem condições de restrição e simétrico no sentido que as variáveis tem igual importância. Esta formatação do problema é elegante e trivialmente generalizável para uma função f com qualquer número de variáveis e com qualquer número de restrições.

Definição: A variável λ (ou μ) é um **multiplicador de Lagrange**.

Em Economia, Geometria Diferencial, Cálculo das Variações, etc. o multiplicador λ é convenientemente interpretado e ganha importância por si só.

No exemplo 5 é frutífera a eliminação dos multiplicadores (leia a resolução sem tal eliminação no livro texto, Guidorizzi, H. L., 'Um Curso de Cálculo, vol 2, 5ª ed., pp. 330-331).

Exemplo 5: Determine os pontos mais afastados da origem e com coordenadas sujeitas às restrições $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

Resolução:

Determinemos os pontos que maximizam a função $D(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância de (x, y, z) a $(0, 0, 0)$ com as restrições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, com $g(x, y, z) = x + y + z - 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$. Tais pontos pertencem à intersecção do elipsóide $g = 0$ com o plano $h = 0$, a qual é um compacto K de \mathbb{R}^3 . Como D é contínua, D assume máximo e mínimo em K . Pela Observação 7 ao Teorema 3, se $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ é extremante local de D sobre $K = \{(x, y, z) : g = 0 \text{ e } h = 0\}$ temos

$$\begin{vmatrix} 2x_o & 2y_o & 2z_o \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x_o & 8y_o & 2z_o \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x_o & y_o & z_o \\ 1 & 1 & 1 \\ x_o & 4y_o & z_o \end{vmatrix} = 0.$$

Logo, $0 = x_o(z_o - 4y_o) - y_o(z_o - x_o) + z_o(4y_o - x_o) = 3y_o(z_o - x_o)$ e temos $y_o = 0$ ou $z_o = x_o$.

Se $y_o = 0$ obtemos

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + z^2 = 4, \end{cases}$$

$$x^2 + (1 - x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Assim, $P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ são candidatos a extremantes.

Se $z_o = x_o$ temos,

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2(1 - 2x)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{9}.$$

Neste caso os candidatos são $P_3 = (0, 1, 0)$ e $P_4 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Comparando os valores $D(P_1) = D(P_2) = 4$, $D(P_3) = 1$ e $D(P_4) = \frac{171}{81}$ constatamos que $P_1 = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ são os pontos desejados ■

Exemplo 6: Determine o ponto sobre a reta de intersecção dos planos $x + 2y + z = 1$ e $-3x - y + 2z = 4$ que está mais próximo à origem.

Resolução:

Minimizemos $x^2 + y^2 + z^2$ sujeita às condições $x + 2y + z - 1 = 0$ e $-3x - y + 2z - 4 = 0$. Definindo

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y + z - 1) - \mu(-3x - y + 2z - 4),$$

resolvamos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda + 3\mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - 2\lambda + \mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z - \lambda - 2\mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x + 2y + z - 1) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = (3x + y - 2z + 4) = 0. \end{cases}$$

Das três primeiras equações temos,

$$x = \frac{\lambda - 3\mu}{2}, \quad y = \frac{2\lambda - \mu}{2}, \quad z = \frac{\lambda + 2\mu}{2},$$

que substituídas na quarta e na quinta equações e então simplificando fornecem

$$\begin{cases} 6\lambda - 3\mu = 2 \\ 3\lambda - 14\mu = -8 \end{cases},$$

e $\lambda = \frac{52}{75}$ e $\mu = \frac{54}{75}$. Donde concluímos, $x = -\frac{11}{15}$, $y = \frac{5}{15}$ e $z = \frac{16}{15}$ ■

Estratégia para a determinação de máximos e mínimos, locais e absolutos, sobre compactos.

Definições topológicas: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

- O ponto $P \in A$ é um **ponto interior de A** se existe uma bola aberta, não vazia, centrada em P e contida em A . Isto é, se existe $r > 0$ tal que $B(P; r) \subset A$.
- O ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um **ponto de fronteira de A** se toda bola aberta, não vazia, centrada em P intersecta A e A^C , o **complementar de A** . Isto é, se para todo $r > 0$, temos $B(P; r) \cap A \neq \emptyset$ e também $B(P; r) \cap A^C \neq \emptyset$.
- O **interior de A** , $\text{int}(A)$, é o conjunto dos pontos interiores de A .
- A **fronteira de A** , ∂A , é o conjunto dos pontos de fronteira de A .

Dado $P \in A \subset \mathbb{R}^n$ temos uma só das possibilidades: ou $P \in \text{int}(A)$, ou $P \in \partial A$.

Determinação de máximos e mínimos, locais e absolutos, para $f \in C^1(K)$:

Notemos que: (A) pelo Teorema de Weierstrass f assume máximo e mínimo, absolutos, em K . (B) Os pontos de máximo e mínimo locais e interiores a K são pontos críticos de f . Isto é, neles o gradiente se anula. Assim, adotamos o procedimento abaixo:

- (1) Restringindo f a $\text{int}(K)$ determinamos os pontos críticos, candidatos a extremantes.
- (2) Encontramos os possíveis pontos de máximo e mínimo de f sobre a fronteira, ∂K , ou elementarmente ou por multiplicadores de Lagrange.
- (3) O máximo e o mínimo absolutos estão entre os valores de f nos pontos acima obtidos.

Exemplo 7. Dada $f(x, y) = 6x^2 + 18xy + 4y^2 - 6x - 10y + 5$, determine os extremantes e os máximos e mínimos locais e absolutos de f no quadrado $K = \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$.

Resolução: Os pontos críticos de f são dados pela equação

$$\vec{\nabla} f = \langle 12x + 18y - 6, 18x + 8y - 10 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \Rightarrow 2x + 3y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad 9x + 4y - 5 = 0$$

Logo, o único ponto crítico no interior de K é $P_0 = \left(\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)$. A matriz hessiana de f é,

$$\mathcal{H}_f = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$

e então, $f_{xx}(P_0) = 12 > 0$ e o determinante hessiano $H_f(P_0)$ é negativo. Logo, P_0 é ponto de sela e f não tem máximo nem mínimo locais no interior de D .

Assim, o máximo e o mínimo absolutos pertencem à fronteira de K ,

$$\partial K = \{-1\} \times [-1, 1] \cup \{1\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{-1\} \cup [-1, 1] \times \{1\}.$$

Na figura abaixo as setas indicam a direção do vetor ortogonal a ∂K .

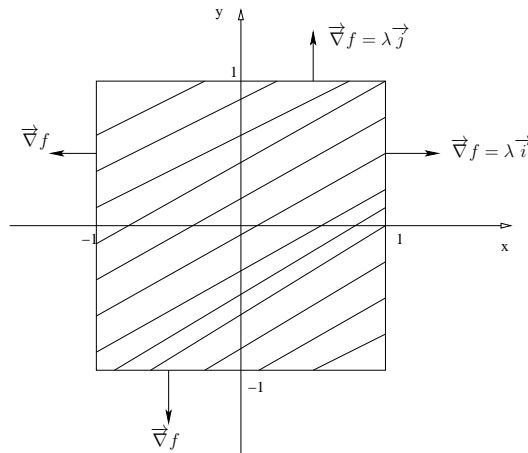


Figura 6: Ilustração ao Exemplo 7

Os extremantes locais na fronteira de K , mas não um vértice, satisfazem (v. Teorema 2):

Em $\{-1\} \times]-1, 1[$ temos $x = -1$ e $0 = f_y = -18 + 8y - 10$; logo, $y = 7/2$, que descartamos.

Em $\{1\} \times]-1, 1[$ temos $x = 1$ e $0 = f_y = 18 + 8y - 10$; logo, $y = -1$ e $P_1 = (1, -1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analisado à parte.

Em $] -1, 1[\times \{-1\}$ temos $y = -1$ e $0 = f_x = 12x - 18 - 6$; logo, $x = 2$, que descartamos.

Em $] -1, 1[\times \{1\}$ temos $y = 1$ e $0 = f_x = 12x + 18 - 6$; logo, $x = -1$ e $P_2 = (-1, 1)$ que não pertence ao segmento considerado, é um vértice e será analisado à parte.

Consequentemente, os pontos de máximo e o mínimo se encontram entre os vértices. Temos, $f(1, 1) = 17$, $f(-1, -1) = 49$, $f(1, -1) = -7$, e $f(-1, 1) = -7$.

Resposta: Não existem máximo ou mínimo locais e interiores; $f(-1, 1) = -7$ é o mínimo absoluto e $f(-1, -1) = 49$ é o máximo absoluto ■

Exemplo 8. Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

sobre o compacto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq 1\}$.

Resolução: Pelo Teorema de Weierstrass f admite pontos de máximo e mínimo absolutos em M . Se tais pontos estiverem no interior de M então eles são pontos críticos.

Os pontos críticos de f satisfazem

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x + 1, 2y + 1, 2z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

e portanto o único ponto crítico $(-1/2, -1/2, 0)$ não pertence ao interior de M e assim os extremantes de f pertencem à fronteira de M , ∂M . Então, os extremantes pertencem a

$$M_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \text{ e } z \geq 1\} \quad \text{ou} \quad M_2 = \{(x, y, z) : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Se o extremante $P = (x_0, y_0, z_0)$ estiver em M_1 , por Multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1, 2z_0 \rangle = \lambda \langle 2x_0, 2y_0, 2z_0 \rangle$$

e portanto $2z_0 = \lambda 2z_0$ e então : ou $\lambda = 1$ ou $z_0 = 0$. Se $z_0 = 0$, $P_0 \in M_1$ e descartamos tal possibilidade. Se $\lambda = 1$ então temos $2x_0 + 1 = 2x_0$, uma contradição!

Assim, os extremantes pertence a

$$M_2 = \{(x, y, z) : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Para determiná-los estudemos os extremantes de

$$\varphi(x, y) = f(x, y, 1) = x^2 + y^2 + x + y + 1 \text{ restrita ao disco compacto } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Pelo Teorema de Weierstrass, φ assume máximo e mínimo absolutos em D . Ainda, se os extremantes pertencerem ao interior de D então eles são pontos críticos e satisfazem

$$\vec{\nabla} \varphi(x_0, y_0) = \langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

e obtemos $(-1/2, -1/2)$, o qual pertence ao interior do disco D , e o ponto

$$P_0 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Se os extremantes estiverem na fronteira de D , $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 3\}$, eles são extremantes da restrição de φ à fronteira ∂D e pelos Multiplicadores de Lagrange satisfazem:

$$\vec{\nabla} \varphi(x_0, y_0) = \langle 2x_0 + 1, 2y_0 + 1 \rangle = \lambda \langle 2x_0, 2y_0 \rangle$$

e encontramos $0 = \begin{vmatrix} 2x_0 + 1 & 2y_0 + 1 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{vmatrix} = 4x_0y_0 + 2y_0 - 4x_0y_0 - 2x_0$. Logo, $x_0 = y_0$ e

como $(x_0, y_0) \in \partial D$ segue $2x_0^2 = 3$ e $x_0 = \pm\sqrt{6}/2$ e assim devemos analisar também $P_1 = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$ e $P_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}, 1)$.

Como $f(P_0) = \frac{1}{2}$, $f(P_1) = 4 + \sqrt{6}$ e $f(P_2) = 4 - \sqrt{6}$, temos que P_0 é ponto de mínimo absoluto e P_1 é ponto de máximo absoluto ■

Exemplo 9 (Um Argumento Importante).

Argumento: Seja $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$ a superfície de nível 0 de uma função

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω um aberto de \mathbb{R}^3 , com f de classe C^1 e $\vec{\nabla} f(x, y, z) \neq \vec{0}$, $\forall (x, y, z) \in S$.

Seja $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ tal que P_1 não pertence a S . Então, se P_0 é o ponto em S que realiza a distância de Q a S [isto é, $|P_1 - P_0| \leq |P_1 - P|$, para todo P em S] temos,

$$\text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{P_0 P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0).$$

Donde, $\overrightarrow{P_0 P_1} \perp S$. Logo: $\overrightarrow{P_0 P_1} \perp \gamma'(t_0)$, se γ é curva de classe C^1 em S e $\gamma(t_0) = P_0$.

Prova: Seja $D(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ definida em \mathbb{R}^3 . Considerando um disco fechado $\overline{D}(P_1; R)$ centrado em P_1 e com raio $R > 0$ suficientemente grande tal que $K = \overline{D}(P_1; R) \cap S \neq \emptyset$, temos que K é compacto (pois fechado e limitado). Pelo Teorema de Weierstrass a função D restrita a K assume um valor mínimo em algum ponto $P \in S$. É fácil ver que P é o ponto P_0 procurado, o qual realiza a distância de P_1 à superfície S .

Então, como D restrita a S assume valor mínimo em $P_0 \in S$, pelo **Método dos Multiplicadores de Lagrange** é válida a equação:

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = \lambda \vec{\nabla} f(P_0), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Computemos o gradiente de $D(x, y, z)$. É fácil ver que

$$\vec{\nabla}(D) = \langle 2(x - x_1), 2(y - y_1), 2(z - z_1) \rangle,$$

e portanto,

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = 2 \langle x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1 \rangle = -2 \overrightarrow{P_0 P_1},$$

e conseqüentemente temos (notemos, abaixo, que a constante -2 é absorvível por λ)

$$-2 \overrightarrow{P_0 P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \quad \blacksquare$$