$7^{\underline{a}}$ Lista de MAT145 - Cálculo II - IO
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2010
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Os exercícios 01, 02 e 03 são "altamente recomendáveis". Os exercícios 1, 2 e 3 serão resolvidos em sala de aula e não serão corrigidos pelo monitor.

01 Determine se f é contínua, e também se é diferenciável, em $(0,0)$. Compute as derivadas parciais de f em todo o $\mathbb{R}^2$ e investigue se elas são contínuas na origem. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f na origem $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$, se existir tal plano (isto é, se f é diferenciável na origem).

$(a)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (b)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$(c)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (d)\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2}\,, (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,,\ \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

02. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$ Verifique e/ou compute:

(a) f é contínua em $(0,0)$? E nos demais pontos ?
(b) Compute f sobre as retas passando pela origem.
(c) Compute f sobre a parábola $\{(y^2, y) : y \in \mathbb{R}\}$.
(d) Compute as derivadas parciais de f na origem.
(e) As derivadas parciais de f são contínuas na origem ? E nos demais pontos ?
(f) f é diferenciável na origem ? E nos demais pontos ?
(g) Esboce as curvas de nível de f.
(h) Determine a imagem de f.
(i) Determine o valor máximo e o valor mínimo de f.

03. Dê exemplos de funções f em duas variáveis reais a valores reais e de um ponto P_0 tais que (prove suas as afirmações)

(a) f é contínua em P_0 mas não é diferenciável em P_0.
(b) f admite derivadas parciais em P_0 mas não é diferenciável em P_0.
(c) f admite todas as derivadas direcionais em P_0 mas não é diferenciável em P_0.
(d) f é diferenciável em P_0 mas as derivadas parciais não são contínuas em P_0.
(e) f admite derivadas parciais em $P_0 = (x_0, y_0)$ mas o plano

$$\pi :\ f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0\,,\quad z_0 = f(P_0) = f(x_0, y_0).$$

não é tangente ao gráfico de f.
(f) Existe $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$, $\forall \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \vec{\nabla} f(P_0) \cdot \vec{v}$, $\forall \vec{v}$ unitário.

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada em volta do ponto (x_0, y_0).
   (a) $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$,
   (b) $f(x,y) = \sin(3x+4y)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$.

2. Sejam $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $(1,1)$.
   (a) Calcule um valor aproximado para $f(1,001; 0,99)$, utilizando $P_1(x,y)$.
   (b) Mostre que se $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$ então,
   $$|f(x,y) - P_1(x,y)| < 7(x-1)^2 + 6(y-1)^2 \ .$$
   (c) Avalie o erro que se comete na aproximação do item (a).

3. Seja $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m,$, com a, b, c, d, e, m constantes reais e seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Prove que para todo (h,k) em $\mathbb{R}^2$ temos
   $$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2 \ .$$

4. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada no conjunto dado.
   (a) $f(x,y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x,y) \ : \ x \geq 0 \, , \ y \geq 0 \, , \ y - x \leq 3 \, , \ x + y \leq 4\}$
   (b) $f(x,y) = 3x - y$ sobre $K = \{(x,y) \in : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (c) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$ sobre $K = \{(x,y) : x \geq 0 \, , y \geq 0 \, , x + y \leq 1\}$.
   (d) $f(x,y) = x + 5y$ em $K = \{(x,y) : \ 5x + 6y \leq 30, \ 3x + 2y \leq 12, \ x \geq 0$ e $y \geq 0\}$.
   (e) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $K = \{(x,y) : \ |x| + |y| \leq 1\}$.
   (f) $f(x,y) = xy$, $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$.

5. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função:
   a) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
   b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} + xy \, , \ x > 0 \ \text{ e } \ y > 0$
   c) $F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$
   d) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 5x + 2y - z + 8$

6. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

7. Estude com relação a máximos e mínimos a função dada com as restrições dadas:

   a) $f(x,y) = 3x + y \quad \text{e} \quad x^2 + 2y^2 \leq 1$

   b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$

   c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y \quad \text{e} \quad x + 2y = 3$

   d) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \quad \text{e} \quad x^2 + 2y^2 = 1$

   e) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \quad \text{e} \quad xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

8. Ache os pontos de máximo e de mínimo da função $F(x,y,z) = x + 2y + z$, com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

9. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.

10. Deterine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem.

11. Determine o ponto da reta r abaixo mais próximo da origem:

$$r: \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

12. Determine o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$.

13. Maximize $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$.

14. Ache P na elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ e Q na reta $x + y = 4$ tais que a distância de P a Q é mínima.

15. Estude, com relação a máximo e mínimo, a função $f(x,y) = y^2 - x^2$ sobre $k = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

16. Estude, com relação a máximos e mínimos, e com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$, a função

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 \ .$$