CÁLCULO II - MAT 145 - Instituto de Oceanografia

2º Lista de Exercícios

2º Semestre de 2010

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Determine o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$:

   a) $\vec{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$

   b) $\vec{a} = \langle 1, -1, 0 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3, 2, 1 \rangle$

   c) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$

   d) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

2. Compute a área do paralelogramo com vértices $A = (0, 1)$, $B = (3, 0)$, $C = (5, -2)$ e $D = (2, -1)$.

3. a) Determine um vetor ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R abaixo.

   b) Calcule também a área do triângulo $\Delta(PQR)$.

   (i) $P = (1, 0, 0), Q = (0, 2, 0), R = (0, 0, 3)$

   (ii) $P = (2, 0, -3), Q = (3, 1, 0), R = (5, 2, 2)$

4. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores

$$\vec{a} = \langle 1, 0, 6 \rangle \ , \ \vec{b} = \langle 2, 3, -8 \rangle \, , \ \vec{c} = \langle 8, -5, 6 \rangle$$

5. Utilize o produto misto para determinar se os pontos $P = (1, 0, 1), Q = (2, 4, 6)$, $R = (3, 1, 2)$ e $S = 6, 2, 8)$ pertencem a um mesmo plano.

6. a) Seja P um ponto não pertencente à reta L, a qual passa pelos pontos Q e R ($Q \neq R$). Mostre que a distância "d" do ponto P à reta L é

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|} \ , \text{ com } \vec{a} = \vec{QR} \ , \ \vec{b} = \vec{QP} \ .$$

   b) Utilize a fórmula da parte a) para determinar a distância do ponto $P = (1, 1, 1)$ à reta que passa por $Q = (0, 6, 8)$ e $R = (-1, 4, 7)$.

7. a) Seja P um ponto não pertencente ao plano que passa pelos pontos Q, R, S. Mostre que a distância "d" do ponto P ao plano é:

$$d = \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

   onde $\vec{a} = \overrightarrow{QR}, \vec{b} = \overrightarrow{QS}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{QP}$.

   b) Utilize a fórmula dada na parte a) para calcular a distância de $P = (1, 2, 4)$ ao plano definido pelos pontos $Q = (1, 0, 0), R = (0, 2, 0)$ e $S = (0, 0, 3)$.

8. Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta:

   a) que passa pelo ponto (1 , 0 , -3) e é paralela ao vetor $2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$;

   b) que passa pelo ponto (1 , 0 , 6) e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$.

9. Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta que:

   a) passa pela origem e pelo ponto (1 , 2 , 3);

   b) passa pelos pontos (-1 , 0 , 5) e (4 , -3 , 3);

   c) é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

10. Mostre que a reta que passa pelos pontos (0 , 1 , 1) e (1 , -1 , 6) é ortogonal à reta que passa pelos pontos (-4 , 2 , 1) e (-1 , 6 , 2).

11. Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine o ponto de intersecção das mesmas:

    a) $L_1 : \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z-1}{-3}$ $\qquad L_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$

    b) $L_1 : x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$ $\qquad L_2 : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = 4 + s$

12. Determine a equação do plano:

    a) que passa pelo ponto (6 , 3 , 2) e é perpendicular ao vetor (-2 , 1 , 5);

    b) que passa pelo ponto (-2 , 8 , 10) e é perpendicular à reta

    $$x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 4 - 3t\ ;$$

    c) passa pelo ponto (1 , -1 , 1) e cuja normal é $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$;

    d) passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$;

    e) passa pelo ponto (-1 , 6 , -5) e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$;

    f) paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$ e que contém a reta

    $$x = 3 + 2t,\ y = t,\ z = 8 - t\ ;$$

    g) passa pelos pontos (3 , -1 , 2) , (8 , 2 , 4) e (-1 , -2 , -3);

    h) passa pelo ponto (1 , 2 , 3) e contém a reta

    $$x = 3t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - t\ ;$$

    i) contendo $(-1, 2, 1)$ e a reta que é a intersecção dos planos $x+y-z = 2$ e $2x-y+3z = 1$.

    j) contendo a reta que é a intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e, ainda, é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$.

13. Dados $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ pontos no plano, mostre com os métodos indicados a fórmula para a área A_Δ do triângulo $\Delta(P_1P_2P_3)$ por eles determinado:

    $$A_\Delta = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

    (a) Utilizando vetores no plano $\mathbb{R}^2 \equiv V^2$.

    (b) Utilizando vetores no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 \equiv V^3$.

14. Verifique $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, quaisquer que sejam $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ em V^3.