CÁLCULO II - MAT 145

Bacharelado Oceanografia - 2 semestre de 2010

Professor Oswaldo Rio Branco

DÚVIDAS

(7) (L1) Se $r = \langle x, y\rangle, r_1 = \langle x_1, y_1\rangle, r_2 = \langle x_2, y_2\rangle$, descreva o cjto. dos pontos (x, y) tais que

$$|r - r_1| + |r - r_2| = R, \quad R > |r_1 - r_2| \ .$$

Solução: Geometricamente, não é difícil ver que o conjunto dado decreveve uma elipse. Para provar analiticamente, consideremos os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e o ponto médio entre P_1 e P_2, $C = \frac{P_1+P_2}{2}$, candidato a centro da elipse (faça um esboço).

Chamemos s a reta por P_1 e P_2 (desenhe).

Trace por C a reta t, perpendicular a s e mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$.

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a P_1 e P_2 igual a R (distam $\frac{R}{2}$ de P_1 ou P_2). Tais pontos são simétricos em relação à reta s, por P_1 e P_2.

Desenhando é fácil ver, por semelhança de triângulos, que se $P = (x, y)$ é tal que seu vetor posição $r = \langle x, y\rangle$ satisfaz $|r - r_1| + |r - r_2| = R$, P', o seu simétrico em relação a s, é tal que seu vetor posição também satisfaz a mesma equação. Assim, a figura a determinar é simétrica em relação a s.

Para o mesmo P, o ponto P'', simétrico de r em relação a t (perpend. a $\overline{P_1P_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a P_1 e P_2 é R.

Concluímos então que a figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e um centro e para desenhá-la basta faze-lo em um quadrante e refletir em relação às retas t e s.

Seja u a reta t, v a reta s e adotemos $C = \frac{P_1+P_2}{2}$ como origem do sist. de coordenadas.

Nesse sistema: $P_1 = (\pm c, 0)$, $P_2 = (\mp c, 0)$. Suponhamos $c > 0$, $P_1 = (c, 0)$ e $P_2 = (-c, 0)$.

Assim, a equação adquire a forma:

$$\sqrt{(u-c)^2 + v^2} + \sqrt{(u+c)^2 + v^2} = R \ .$$

Agora, confio que vocês conseguem chegar ao formato padrão:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \blacksquare$$

(13) (L2) Dados $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ pontos no plano, mostre com os métodos indicados a fórmula para a área A_Δ do triângulo $\Delta(P_1P_2P_3)$ por eles determinado:

$$A_\Delta = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| .$$

(a) Utilizando vetores no plano $\mathbb{R}^2 \equiv V^2$.

(b) Utilizando vetores no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 \equiv V^3$.

Soluções:

(a) Dados (a, b) e (c, d) em $\mathbb{R}^2$, o módulo do determinante 2x2

$$\left| \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right| = |ad - bc| ,$$

é a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ e $\vec{v} = \langle c, d \rangle$.

Desta forma, a área do triângulo determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3 é metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores (vide figura)

$$\vec{u} = \langle x_2 - x_1 \, , y_2 - y_1 \rangle \qquad \text{e} \qquad \vec{v} = \langle x_3 - x_1 \, , y_3 - y_1 \rangle \ .$$

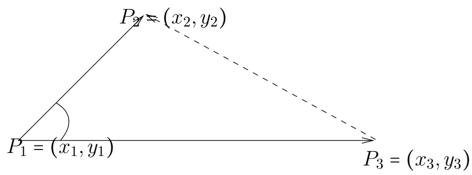

Figura 1: Ilustração ao ítem (a)

Portanto temos,

$$\text{área}\Big(\Delta(P_1P_2P_3)\Big) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right| .$$

Desenvolvendo o determinante encontramos,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) =$$

$$= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + \mathbf{x_1y_1} - x_3y_2 + x_3y_1 + x_1y_2 - \mathbf{x_1y_1} =$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2) \ - \ (x_1y_3 - x_3y_1) \ + \ (x_1y_2 - x_2y_1) \ =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} | + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 - \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} .$$

Finalmente, notando que o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta concluímos:

$$\text{área}\Big(\Delta(P_1P_2P_3)\Big) = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right| .$$

(b) Consideremos os pontos P_1, P_2 e P_3 imersos em $\mathbb{R}^3$. Assim, identificamos

$$P_1 \equiv (x_1, y_1, 0) \;\; , \;\; P_2 = (x_2, y_2, 0) \;\; \text{e} \;\; P_3 = (x_3, y_3, 0) \; .$$

Então, utilizando o ponto no eixo Oz e "abaixo" do plano Oxy, $P = (0,0,-1)$ e considerando também o

$$\text{tetraedro } T \text{ determinado pelos pontos } P_1\,, P_2\,, P_3\,, \text{ e } P\,,$$

o volume de T é um terço $\left(\frac{1}{3}\right)$ da área da base vezes a altura h:

$$\text{vol}(T) = \frac{A_b \cdot h}{3} ,$$

e, ainda mais, A_b é á área que queremos calcular:

$$A_b = \text{área}\Big(\Delta(P_1P_2P_3)\Big) .$$

Observemos que $2A_b \cdot h$ é o volume do paralelepípedo cuja área da base é dada pelo

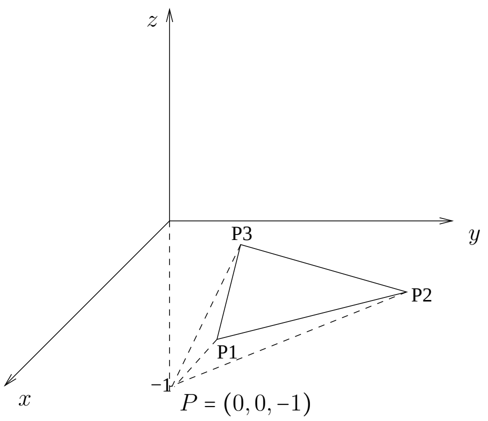

Figura 2: Ilustração ao ítem (b)

paralelogramo no plano determinado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ e cuja altura é a mesma que a do tetraedro (altura $h = 1$).

Entretanto, o paralelepípedo acima referido tem o mesmo volume que o paralelepípedo determinado pelos vetores

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{PP_1} = \langle x_1\,, y_1\,, 1\rangle\ , \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_2} = \langle x_2, y_2, 1\rangle\ , \\ \vec{w} = \overrightarrow{PP_3} = \langle x_3\,, y_3, , 1\rangle\ . \end{cases}$$

que convenientemente esboçamos a seguir.

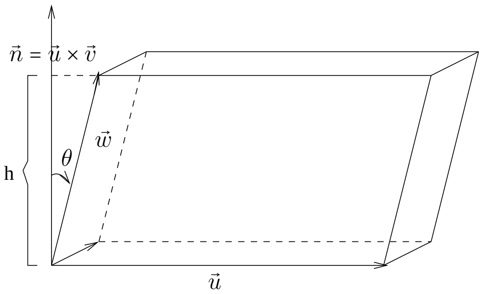

Figura 3: Ilustração ao ítem (b)

Desta forma, utilizando o produto misto dos vetores $\vec{u}\,, \vec{v}$ e $\vec{w}$ obtemos

$$2A_b \cdot h = |\,[\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w}\,]| = |\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\,|\ .$$

Consequentemente,

$$\text{área}\Big(\Delta(P_1P_2P_3)\Big) = A_b = \frac{1}{2}|\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\,|$$

e também obtemos como informação extra

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{6}|\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\,|\ .$$

Por fim, concluímos notando que

$$|\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\,| = \left|\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right| \blacksquare$$

A seguir apresentamos justificativas adicionais e algébricas para as soluções dadas aos exercícios 21 a 28 (que solicitam identificações de superfícies chamadas **"quádricas"**) que se encontram no livro Cálculo, J. Stewart, Volume 2, Capítulo 12 (Vetores e Geometria do Espaço) p. 837, entregues em sala de aula e já corrigidos em sala de aula em 02/09/10 (sexta-feira).

Consideremos o sistema de eixos $Oxyz$ positivamente orientado (iso é, vale a regra da mão direita). Interpretemos o plano Oyz (isto é, $x = 0$) como "o plano desta folha de papel)", com o eixo Oz apontando "para cima" e o eixo Oy apontando para "a direita". Interpretemos o eixo Ox como perpendicular a esta folha de papel e apontando "na nossa direção".

(21) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

As projeções sobre os planos Oxy ($z = 0$), Oxz ($y = 0$) e Oyz ($x = 0$ são, respectivamente, as elipses $x^2 + 4y^2 = 1$, $x^2 + 9z^2 = 1$ e $4y^2 + 9z^2 = 1$.

Como $x \in [-1, 1]$, $2y \in [-1, 1]$ e $3z \in [-1, 1] \Rightarrow$ elipsóide alongado na direção eixo Ox.

Classificação: Elipsóide alongado na direção do eixo Ox.

Resposta: Figura VII.

(22) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$.

As projeções sobre os planos coordenados são novamente elipses.

Como $3x \in [-1, 1]$, $2y \in [-1, 1]$ e $z \in [-1, 1] \Rightarrow$ elipsóide alongado na direção eixo Oz.

Classificação: Elipsóide alongado na direção do eixo Oz.

Resposta: Figura IV.

(23) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

A projeção sobre o plano Oyz, isto é $x = 0$, "o plano desta folha de papel", é dada pela equação $z^2 - y^2 = 1$ que determina uma **hipérbole** com dois ramos $z = \pm\sqrt{1 + y^2}$ [um ramo "para cima" na direção do eixo Oz e outro ramo "para baixo" e também na direção do eixo Oz; os eixos da hipérbole são os eixos Oy e Oz].

Um corte (da superfície) transversal ao plano Oyz (corte "transversal a esta folha de papel") corresponde a fixarmos y, pondo $y = y_0$, y_0 uma constante real **arbitrária**. O corte transversal é a intersecção do plano $y = y_0$ (perpendicular a esta "folha de papel") com a superfície dada e tal corte é identificado pela equação $x^2 + z^2 = y_o^2 + 1$ (com a restrição $y = y_0$; isto é, o corte é identificado por um sistema com duas equações) que determina uma **circunferência**.

Classificação: Hiperbolóide de uma folha, eixo Oy, seção transversal circular.

Resposta: Figura II.

(24) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

A projeção sobre o plano Oyz, isto é, $x = 0$, "o plano desta folha de papel", é dada pela equação $y^2 - z^2 = 1$ que determina uma hipérbole com dois ramos $y = \pm\sqrt{1 + z^2}$: um ramo com concavidade voltada " à direita" na direção do eixo Oy e o outro ramo com concavidade voltada "à esquerda" e também na direção do eixo Oy; no plano Oyz os eixos da hipérbole são as retas $z = 0$ e $y = 0$ (os eixos Oy e Oz, respectivamente).

Um corte (da superfície) transversal ao plano Oyz (corte "transversal a esta folha de papel") corresponde a fixarmos y, pondo $y = y_0$. Neste caso o corte transversal é determinado pela intersecção do plano $y = y_0$ (perpendicular a esta "folha de papel") com a superfície dada e tal corte é identificado pela equação $y_0^2 = x^2 + z^2 + 1$ (com a restrição $y = y_0$; isto é, o corte é determinado por um sistema formado por duas equações). Observemos que neste caso y_0 **não é uma constante arbitrária** já que temos a condição (restrição) $y_0^2 \geq 1$ [consequentemente, a superfície procurada tem duas folhas, uma para $y \geq 1$ e outra para $y \leq -1$]. Ainda mais, a equação $y_0^2 = x^2 + z^2 + 1$ determina a circunferência $x^2 + z^2 = y_0^2 - 1$.

Classificação: hiperbolóide de duas folhas, eixo Oy e corte transversal circular.

Resposta: III

(25) $y = 2x^2 + z^2$.

A projeção sobre o plano Oyz ($x = 0$), " o plano desta folha de papel", é dada pela equação $y = z^2$ que determina uma parábola com eixo Oy e "concavidade" voltada para "a direita", no sentido do crescimento da variável y.

Um corte (da superfície) transversal ao plano Oyz (corte "transversal a esta folha de papel") corresponde a fixarmos a variável y, pondo $y = y_0$. O corte é a intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície dada e é identificado pelas equações $2x^2 + z^2 = y_0$ e $y = y_0$ que descrevem uma elipse.

Classificação: parabolóide elíptico, eixo Oy.

Resposta: VI

Doravante, sejamos concisos.

(26) $y^2 = x^2 + 2z^2$.

A projeção sobre o plano Oyz ($x = 0$), "o plano desta folha de papel", é dada pela equação $y^2 = 2z^2$, determinando duas retas concorrentes pela origem: $y = \pm\sqrt{2}z$.

Um corte (da superfície) transversal ao plano Oyz ("transversal a esta folha") corresponde a fixarmos $y = y_0$. O corte é a intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície e é identificado pela equação $x^2 + 2z^2 = y_0^2$ (supondo $y = y_0$) que descreve uma elipse.

Classificação:cone elíptico com eixo Oy.

Resposta: I.

(27) $x^2 + 2z^2 = 1$.

Esta equação não contém a variável y. Portanto, basta esboçar a curva determinada por tal superfície no plano Oxz [a intersecção da superfície com o plano Oxz $(y = 0)$] e então esboçar o cilindro com eixo paralelo ao eixo Oy cuja projeção sobre o plano Oxz seja a curva encontrada.

A curva $x^2 + 2z^2 = 1$, no plano Oxz, é evidentemente uma elipse.

Classificação: cilindro elíptico com eixo Oy.

Resposta: VIII.

(28) $y = x^2 - z^2$.

A projeção no plano Oyz $(x = 0)$, o "plano da folha", é dada pela equação $y = -z^2$, descrevendo uma parábola com eixo Oy, vértice a origem de Oyz, e concavidade " à esquerda" (sentido de decrescimento da variável y).

A projeção no plano Oxy, perpendicular ao eixo Oz e ao "plano da folha", é dada por $y = x^2$, descrevendo uma parábola também com eixo Oy, vértice a origem do sistema Oxy e concavidade "à direita" (sentido de crescimento da variável y).

Um corte transversal ao plano Oyz ("transversal à folha") corresponde a fixarmos $y = y_0$. O corte, intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície, é identificado pela equação $x^2 - z^2 = y_0$ (supondo $y = y_0$) que descreve uma hipérbole.

Classificação: parabolóde hiperbólico com eixo Oy.

Resposta: V.

Notemos: podemos imaginar ramos de hipérboles "pendurados" ao longo da parábola (concavidade para a direita) situada no plano Oxy e descrita por $y = x^2$ junto com ramos de hipérboles "pendurados" ao longo da parábola (concavidade para a esquerda) situada no plano Oyz e descrita por $y = -z^2$.

A seguir classificamos as superfícies quádricas indicadas no exercício 9, lista 3.

(9) (lista 3) Esboce e identifique as superfícies quádricas abaixo.

(a) $2x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.

Elipsóide $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ com centro $(0, 0, 0)$ e alongado na direção do eixo Oy.

(b) $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.

Cone duplo circular $z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2}$, eixo Oz, uma geratriz é a reta $z = \pm 2x$.

(c) $z = 4(x^2 + y^2)$.

Parabolóide circular eixo Oz, vértice $(0, 0, 0)$, concavidade voltada “para cima”.

(d) $x^2 + z^2 - 4y = 4$.

Parabolóide circular $y = \frac{x^2+z^2}{4} - 1$, eixo Oy, vértice $(0, -1), 0)$, concavidade voltada para “a direita”.

(e) $y^2 - 4x^2 - 9z^2 = 36$.

Hiperbolóide (elíptico) de duas folhas $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ ou $\frac{y^2}{36} = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} + 1$, eixo Oy, corte transversla elíptico, vértice da folha com concavidade voltada para a esquerda $(0, -6, 0)$ e vértice da folha com concavidade voltada para a direita $(0, +6, 0)$.

(f) $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$.

Parabolóide elíptico de eixo Oz, vértice $(0, 0, 4)$ e concavidade voltada “para baixo”.

(g) $z = x^2 - 2y^2$.

Parabolóide hiperbólico de eixo Oz. Cortes horizontais ($z =$ cte.) são hipérboles e cortes verticais ($x =$ cte. e $y =$ cte.) são parábolas.

(h) $x^2 = y^2 + 4z^2$.

Cone elíptico de eixo Ox.

(i) $x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$.

Hiperbolóide (elíptico) de duas folhas de eixo Ox, corte transversal elíptico, vértice da folha com concavidade voltada para “nossa direção” $(2, 0, 0)$ e vértice da folha com concavidade voltada “para dentro da folha de papel” $(-2, 0, 0)$.

(j) $x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$.

Hiperbolóide (elíptico) de uma folha de eixo Oz, corte transversal elíptico.

(k) $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

Elipsóide alongado na direção do eixo Oy ($y \in [-3, +3]$, $x \in [-1, +1]$ e $z \in [-2, +2]$).

(l) $y = 1 - x^2 - 2y^2$.

A equação corresponde à equação $2(y + \frac{1}{4})^2 + x^2 = \frac{9}{8}$.

Cilindro elíptico de eixo Oz e, base do cilindro a elipse $2(y + \frac{1}{4})^2 + x^2 = \frac{9}{8}$.

(m) $z + 4x^2 = y^2$.

Parabolóide hiperbólico: $z = y^2 - 4x^2$. Eixo Oz, cortes horizontais ($z =$ cte. não nula) são hipérboles e cortes verticais ($x =$ cte. e $y =$ cte.) são parábolas.

(n) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

A equação corresponde à equação $(x-1)^2 + (y-2)^2 - z^2 = 4$ ou $(x-1)^2 + (y-2)^2 = z^2 + 4$.

Hiperbolóide (corte transversal circular) de uma folha de eixo vertical (paralelo ao eixo Oz) passando pelo ponto $(1,2,0)$, os cortes horizontais ($z =$ cte.) são circunferências e os cortes verticais ($x =$ cte. e $y =$ cte.) são hipérboles.

A intersecção do hiperbolóide com o plano xy ($z = 0$) é o círculo satisfazendo o sistema de equações $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ e, por pertencer ao plano Oxy, $z = 0$. Este círculo está centrado no ponto $(1,2,0)$ pertencente ao plano Oxy.

(10) Calcule, caso exista.

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$.

Notemos que a função $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2-y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, se anula tanto sobre o eixo Ox como também sobre o eixo Oy.

Analisemos agora a curva de nível $c = 1$ da função $f(x,y)$. Temos,

$$f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \frac{xy^2}{x^2 - y^2} = 1 \Leftrightarrow xy^2 = x^2 - y^2 \Leftrightarrow y^2(x+1) = x^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{x+1} \ .$$

Então, definindo a curva

$$\left\{\gamma(x) \ = \ \left(x, \frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) : x > -1\right\}$$

é claro que

$$\lim_{x\to 0^+} \gamma(x) = (0,0)$$

mas,

$$f\big(\gamma(x)\big) = 1\,, \ \text{para todo } x > -1\ .$$

Logo, f não é contínua em $(0,0)$.

VIDE PRÓXIMA PÁGINA

- **Exercício 7, 11.3, p. 205**, livro-texto: H. L. G., Um Curso de Cálculo, Vol 2, 5 ed.

Mostre que os planos tangentes ao gráfico de $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ passam pela origem.

Resolução:

O domínio de f é $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e para $(x,y) \neq (0,0)$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^3 2y}{(x^2+y^2)^2} \ . \end{cases}$$

Então, o plano π tangente ao gráfico de f, $\mathrm{Gr}(f)$, em (x_0,y_0) é

$$\pi : \ \frac{x_0^4+3x_0^2y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(x-x_0) \ - \ \frac{2x_0^3y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}(y-y_0) - \big(z - f(x_0,y_0)\big) = 0 \ .$$

Verifiquemos que $(0,0,0)$ pertence a π:

$$\begin{aligned} &\frac{x_0^4+3x_0^2y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(-x_0) \ - \ \frac{2x_0^3y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}(-y_0) \ + \ f(x_0,y_0) = \\ &= \frac{-x_0^5 - 3x_0^3y_0^2 + 2x_0^3y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} + \frac{x_0^3}{x_0^2+y_0^2} = \\ &= \frac{-x_0^5 - x_0^3y_0^2 + x_0^3(x_0^2+y_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2} = 0 \ \blacksquare \end{aligned}$$

(6) (L7) Determine o ponto do plano $3x+2y+z=12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ seja mínima.

Resolução:

Geometricamente, se K é uma bola fechada que contém os pontos dados e intersecta o plano dado, o ponto procurado pertence a K e é então o mínimo absoluto da função $D(x,y,z) = (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$ restrita ao compacto K. O Teorema de Weierstrass assegura a existência de tal mínimo.

Pelo Teorema 2 os extremantes de $D(x,y,z)$ com a restrição $3x+2y+z=12$ satisfazem:

$$\vec{\nabla} D(x,y,z) = \lambda \langle 3,2,1 \rangle \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \, ,$$

ou, eliminando o parâmetro λ,

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x+2(x-1) & 2y+2(y-1) & 2z+2(z-1) \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \, .$$

Desta forma é claro que desenvolvendo o segundo determinante pela primeira linha temos, $(2y-1-4z+2)\vec{i}-(2x-1-6z+3)\vec{j}+(4x-2-6y+3)\vec{k}=\vec{0}$ e portanto, $2y=4z-1$ e $x=3z-1$; donde, substituindo na equação do plano, obtemos $3(3z-1)+(4z-1)+z=12$ e $z=\frac{16}{14}$, $y=\frac{25}{14}$ e $x=\frac{34}{14}$. Logo, o ponto procurado é $P_o = \left(\frac{34}{14}, \frac{25}{14}, \frac{16}{14}\right)$.

Atenção: neste caso também podemos eliminar λ mais simplesmente com as equações

$$\frac{2x+2(x-1)}{3} = \frac{2y+2(y-1)}{2} = \frac{2z+2(z-1)}{1} \quad (=\lambda) \qquad \blacksquare$$

Um Argumento Importante

Argumento: Seja $S = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$ a superfície de nível 0 de uma função

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$, com f de classe C^1 e $\vec{\nabla} f(x,y,z) \neq \vec{0}$, $\forall (x,y,z) \in S$.

Seja $P_1 = (x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ tal que P_1 não pertence a S. Se $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ é o ponto em S que realiza a distância de Q a S [isto é, $|P_1 - P_0| \leq |P_1 - P|$, para todo P em S] temos,

$$\text{existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{P_0P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \ .$$

Donde, $\overrightarrow{P_0P_1} \perp S$. Isto é, $\overrightarrow{P_0P_1} \perp \gamma'(t_0)$, para curvas γ em S e de classe C^1, com $\gamma(t_0) = P_0$

Prova: Seja $D(x,y,z) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$ definida em $\mathbb{R}^3$. Considerando um disco fechado $\overline{D}(P_1;R)$ centrado em P_1 e com raio $R > 0$ suficientemente grande tal que $K = \overline{D}(P_1;R) \cap S \neq \emptyset$, temos que K é compacto (pois fechado e limitado). Pelo Teorema de Weierstrass a função D restrita a K assume um valor mínimo em algum ponto $P \in S$. É fácil ver que P é o ponto P_0 procurado, o qual realiza a distância de P_1 à superfície S.

Então, como D restrita a S assume valor mínimo em $P_0 \in S$, pelo **Método dos Multiplicadores de Lagrange** é válida a equação:

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = \lambda \vec{\nabla} f(P_0)\,, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Computemos o gradiente de $D(x,y,z)$. É fácil ver que

$$\vec{\nabla}(D) = \langle 2(x-x_1)\,, 2(y-y_1)\,, 2(z-z_1)\rangle \ ,$$

e portanto,

$$\vec{\nabla}(D)(P_0) = 2\,\langle x_0 - x_1\,, y_0 - y_1\,, z_0 - z_1\rangle \ = \ -2\overrightarrow{P_0P_1} \ ,$$

e consequentemente temos (notemos, abaixo, que a constante -2 é absorvível por λ)

$$-2\overrightarrow{P_0P_1} = \lambda \vec{\nabla} f(P_0) \qquad \blacksquare$$

(16) (L7) Estude com relação a máximo e mínimos, e com a restrição $x^2 + 2y^2 = 1$, a função,

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$$

Resolução Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange nos pontos de máximo e mínimo (os quais existem pelo Teorema de Weierstrass) existe algum λ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y).$$

Logo, $\langle 2x - 2y\,, -2x + 6y\rangle = \lambda\,\langle 2x\,, 4y\rangle$ e então, $\langle x - y\,, -x + 3y\rangle = \lambda\,\langle x\,, 2y\rangle$ e assim,

$$0 = \begin{vmatrix} x - y & -x + 3y \\ x & 2y \end{vmatrix} = 2y(x-y) - x(-x+3y) = 2xy - 2y^2 + x^2 - 3xy.$$

Assim temos, $x^2 - 2y^2 - xy = 0$ e, de $x^2 + 2y^2 = 1$, obtemos $2x^2 - xy = 1$ e então

$$y = 2x - \frac{1}{x}$$

donde segue $y^2 = 4x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}$ e $x^2 + 2\left(4x^2 - 4 + \frac{1}{x^2}\right) = x^2 + 8x^2 - 8 + \frac{2}{x^2} = 1$ e

$$9x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - x^2 + \frac{2}{9} = 0\ .$$

Logo,

$$x^2 = \frac{3 \pm 1}{6} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{2}{3} \text{ ou } x^2 = \frac{1}{3}$$

Assim temos

$$x = -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{ou} \quad x = +\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad x = +\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

Se $x^2 = \frac{2}{3}$ temos $y^2 = \frac{1-x^2}{2} = \frac{1}{6}$ e $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Se $x^2 = \frac{1}{3}$ temos $y^2 = \frac{1}{3}$ e $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Assim, temos oito (8) pontos a analizar:

$$\text{os 4 primeiros: } \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\,, \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \qquad \text{e} \qquad \text{os 4 últimos: } \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ .$$

Simplifiquemos a análise dos valores de $f(x,y) = (x^2 + 3y^2) - 2xy$ nestes 8 candidatos a pontos de máximo e de mínimo destacando a expressao entre parenteses $(x^2 + 3y^2)$.

Para os primeiros 4 pontos temos $x^2 + 3y^2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$.

Para os últimos 4 pontos temos $x^2 + 3y^2 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}$.

Para os primeiros 4 pontos o máximo ocorre em $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\,, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ e é $\frac{7}{6} + 2\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{7}{6} + \frac{2}{3} = \frac{11}{6}$ e o mínimo ocorre em $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\,, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ e é $\frac{7}{6} - 2\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{7}{6} - \frac{2}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Para os últimos 4 pontos o máximo ocorre em $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e é $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$ e o mínimo ocorre em $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ e é $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Resposta: O valor máximo ocorre em $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e é 2.

O valor mínimo ocorre em $\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\,, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\,, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e é $\frac{1}{2}$ $\blacksquare$

8 LISTA DE EXERCÍCIOS

(2) (L8) Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto da função

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y$$

sobre o compacto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ e } z \geq 1\}$.

Resolução: Pelo Teorema de Weierstrass f admite pontos de máximo e mínimo absolutos em M. Se tais pontos estiverem no interior de M então eles são pontos críticos.

Os pontos críticos de f satisfazem

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x+1\,, 2y+1\,, 2z\rangle = \langle 0\,,0\,,0\rangle$$

e portanto o único ponto crítico $(-1/2\,,-1/2\,,0)$ não pertence ao interior de M e assim os extremantes de f pertencem à fronteira de M, ∂M. Então, os extremantes pertencem a

$$M_1 = \Big\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \text{ e } z \geq 1\Big\} \quad \text{ou} \quad M_2 = \Big\{(x,y,z) : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 3\Big\}\ .$$

Se o extremante $P = (x_0, y_0, z_0)$ estiver em M_1, por Multiplicadores de Lagrange temos,

$$\vec{\nabla} f = \langle 2x_0+1\,, 2y_0+1\,, 2z_0\rangle = \lambda\,\langle 2x_0\,, 2y_0\,, 2z_0\rangle$$

e portanto $2z_0 = \lambda 2z_0$ e então : ou $\lambda = 1$ ou $z_0 = 0$. Se $z_0 = 0$, $P_0 \in M_1$ e descartamos tal possibilidade. Se $\lambda = 1$ então temos $2x_0 + 1 = 2x_0$, uma contradição!

Assim, os extremantes pertence a

$$M_2 = \Big\{(x,y,z) : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 3\Big\}\ .$$

Para determiná-los estudemos os extremantes de

$\varphi(x,y) = f(x,y,1) = x^2+y^2+x+y+1$ restrita ao disco compacto $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 3\}$.

Pelo Teorema de Weierstrass, φ assume máximo e minimo absolutos em D. Ainda, se os extremantes pertencerem ao interior de D então eles são pontos críticos e satisfazem

$$\vec{\nabla}\varphi(x_0\,,y_0) = \langle 2x_0+1\,, 2y_0+1\rangle = \langle 0\,,0\rangle$$

e obtemos $(\mathbf{-1/2}\,,\mathbf{-1/2})$, o qual pertence ao interior do disco D, e o ponto

$$P_0 = (-\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}\,,1)\ .$$

Se os extremantes estiverem na fronteira de D, $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 3\}$, eles são extremantes da restrição de φ à fronteira ∂D e pelos Multiplicadores de Lagrange satisfazem:

$$\vec{\nabla}\varphi(x_0\,,y_0) = \langle 2x_0+1\,, 2y_0+1\rangle = \lambda\,\langle 2x_0\,, 2y_0\rangle$$

e encontramos $0 = \begin{vmatrix} 2x_0 + 1 & 2y_0 + 1 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{vmatrix} 4x_0y_0 + 2y_0 - 4x_0y_0 - 2x_0$. Logo, $x_0 = y_0$ e como $(x_0\,, y_0) \in \partial D$ segue $2x_0^2 = 3$ e $x_0 = \pm\sqrt{6}\big/2$ e assim devemos analizar também $P_1 = (\frac{\sqrt{6}}{2}\,, \frac{\sqrt{6}}{2}\,, 1)$ e $P_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{2}\,, -\frac{\sqrt{6}}{2}\,, 1)$.

Como $f(P_0) = \frac{1}{2}\,,\ f(P_1) = 4 + \sqrt{6}$ e $f(P_2) = 4 - \sqrt{6}$, temos que P_0 é ponto de mínimo absoluto e P_1 é ponto de máximo absoluto $\blacksquare$