

Curso: MAT 144 - CÁLCULO I - IO
 Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
 Período: 1 semestre de 2010

LISTA 00 - Recordação

BOA SORTE !

1. **Relação Entre As Médias Aritmética, Harmônica e Geométrica** Na figura abaixo temos $|AC| = a$ e $|BC| = b$.

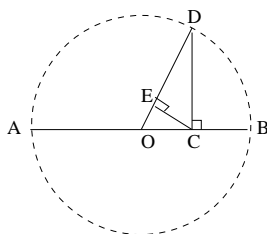


Figura 1: Médias aritmética - harmônica - geométrica

- (i) Determine $|ED|$ em função de a e b .
- (ii) Comprove na figura que a média aritmética de dois números a e b positivos é maior ou igual a sua média geométrica, a raiz quadrada do produto de a por b , que é maior ou igual a sua média harmônica, o inverso da média aritmética dos inversos de a e b :

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} .$$

Observação Dados a e b positivos, c ($a < c < b$) é média harmônica de a e b se

$$(*) \quad \frac{c-a}{b-c} = \frac{a}{b} .$$

Interpretando a , c e b como comprimentos de segmentos temos a figura abaixo.



Figura 2: Média Harmônica

De (*) temos $bc - ab = ab - ac$; logo, $c = \frac{2ab}{a+b}$ e portanto:

$$c = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} .$$

2. Interpretação Geométrica de um Determinante 2x2 :

$$D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Representemos dois vetores $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ e $\vec{v} = \langle c, d \rangle$, não paralelos e em \mathbb{R}^2 , canonicamente, com extremidades inicial $O = (0, 0)$ e finais (a, b) e (c, d) , respectivamente. Eles determinam um paralelogramo Ω e supomos-os, inicialmente, no primeiro quadrante. Seja, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \langle a + b, c + d \rangle$ com extremidade inicial a origem. Temos a representação de Ω ,

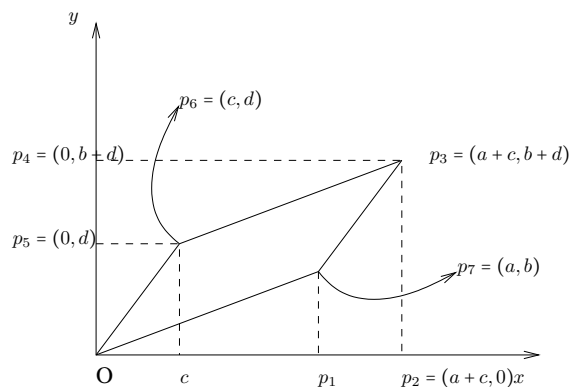


Figura 3: Determinante/Área

Considerando os pontos P_i , $1 \leq i \leq 7$, calculemos a área delimitada por Ω .

Notação: $A(S)$ é a área delimitada pela curva S .

Temos,

$$A(\Omega) = A(OP_2P_3P_4) - A(OP_1P_7) - A(P_1P_2P_3P_7) - A(P_3P_4P_5P_6) - A(P_5OP_6),$$

sendo que:

$$A(OP_2P_3P_4) = (a + c)(b + d) = ab + ad + bc + cd,$$

$$A(OP_1P_7) = \frac{ab}{2},$$

$$A(P_1P_2P_3P_7) = \frac{(b + b + d)c}{2} = bc + \frac{cd}{2},$$

$$A(P_3P_4P_5P_6) = \frac{(c + a + c)b}{2} = bc + \frac{ab}{2} \text{ e}$$

$$A(P_5OP_6) = \frac{cd}{2}.$$

Logo, temos

$$A(\Omega) = ab + ad + bc + cd - \frac{ab}{2} - bc - \frac{cd}{2} - bc - \frac{ab}{2} - \frac{cd}{2} = ad - bc.$$

Associamos então o determinante a uma área.

A área é positiva e o determinante não necessariamente. Não há aí uma incongruência pois casos em que o determinante é negativo não corresponderão à figura esboçada. Verifique.

Observação: Se \vec{u} corresponde à primeira coluna do determinante, \vec{v} à segunda, \vec{u} e \vec{v} não paralelos, e o **menor ângulo** da extremidade final de \vec{u} à extremidade final de \vec{v} estiver orientado no sentido anti-horário então,

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0 .$$

Caso contrário, se a orientação é no sentido horário, temos $ad - bc < 0$.

Verificação Medimos ângulos em \mathbb{R}^2 no sentido anti-horário e a partir do eixo Ox .

Se α é o ângulo de Ox a \vec{u} e β o ângulo de Ox a \vec{v} temos, $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ e $\tan \beta = \tan \frac{d}{c}$.

Caso 1: \vec{u} no primeiro quadrante.

(1a) Para \vec{v} no primeiro quadrante temos (vide figura anterior),

$$0 < \tan \alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan \beta , \quad bc < ad , \quad ad - bc > 0 ,$$

onde na segunda implicação utilizamos $ac > 0$.

(1b) Para \vec{v} no segundo quadrante temos $c < 0$, $d > 0$, $ac < 0$ e,

$$\tan \beta = \frac{d}{c} < 0 < \frac{b}{a} = \tan \alpha , \quad ad > bc .$$

(1c) Para \vec{v} no terceiro quadrante, com $0 < \beta - \alpha < \pi$, temos $c < 0$, $d < 0$, $ac < 0$ e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (esboce),

$$0 < \tan \beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan \alpha , \quad ad > bc .$$

Caso 2: \vec{u} no segundo quadrante logo, $a < 0$ e $b > 0$.

(2a) Para \vec{v} no segundo quadrante temos, $c < 0$, $d > 0$, $ac > 0$ e (esboce),

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} < \frac{d}{c} = \tan \beta < 0 , \quad bc < ad .$$

(2b) Para \vec{v} no terceiro quadrante então $c < 0$, $d < 0$, $ac > 0$ e,

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} < 0 < \frac{d}{c} = \tan \beta , \quad bc < ad .$$

(2c) Para \vec{v} no quarto quadrante, com $0 < \beta - \alpha < \pi$, temos $c > 0$, $d > 0$, $ac < 0$ e observando o valor da tangente no círculo trigonométrico (esboce),

$$\tan \beta = \frac{d}{c} < \frac{b}{a} = \tan \alpha < 0 , \quad ad > bc .$$

Casos 3 e 4: Para \vec{u} no terceiro quadrante, os sub-casos com \vec{v} no 3, 4 e 1 quadrantes são análogos a (1a), (1b) e (1c), respectivamente. Para \vec{u} no 4 quadrante os sub-casos com \vec{v} no 4, 1 e 2 quadrantes são análogos a (2a), (2b) e (2c), respectivamente ■

Verifique: Nas doze possibilidades acima o determinante é igual à área do paralelogramo determinado pelos vetores cujas coordenadas são as colunas.

Obs Se o ângulo de \vec{u} a \vec{v} é maior que π , o de \vec{v} a \vec{u} é menor que π e o determinante cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas de \vec{v} e a segunda pelas de \vec{u} é positivo e, portanto, trocando as colunas o determinante obtido é negativo.

Exercício 1 Para $z_j = x_j + iy_j = e^{i\theta_j}|z_j|$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ temos,

$$z_2 \overline{z_1} = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |z_1||z_2| \cos(\theta_2 - \theta_1) + i |z_1||z_2| \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) .$$

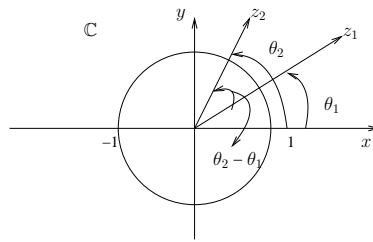


Figura 4: Ângulo entre dois números em \mathbb{C}

Consequência Com as mesmas hipóteses e notação acima,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |z_1||z_2| \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) .$$

O ângulo entre os segmentos \overline{AB} e \overline{AC} é o menor ângulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, unindo B e C .

Exercício 2 A área de um paralelogramo tal que θ é o ângulo entre dois lados não paralelos e de comprimentos l_1 e l_2 é: $l_1 l_2 \operatorname{sen} \theta$. Notemos que $0 < \theta < \pi$. Vide figura. O

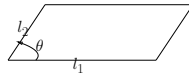


Figura 5: Área de um Paralelogramo

ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é, fixadas representações de \vec{u} e \vec{v} com mesmo ponto inicial, o menor ângulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, unindo suas extremidades finais.

Se $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ temos $\theta_2 - \theta_1 = \theta$, $\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = \operatorname{sen} \theta$ e o determinante é a área do paralelogramo determinado por \vec{u} e \vec{v} . Se $\pi < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$ então $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi - \theta$, $\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = -\operatorname{sen} \theta$ e o determinante é o oposto da área do paralelogramo ■

Exercício 3 Prove $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_2 \overline{z_1}) + |z_2|^2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Obs: Sendo θ o ângulo entre os segmentos que representam usualmente os números complexos $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$, no plano de Argand-Gauss temos, pela **lei dos cossenos**,

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \cos \theta .$$

Pelo exercício 2, $|z_1||z_2| \cos \theta = |z_1||z_2| \cos(\theta_2 - \theta_1)$. Notemos que $\cos \theta = \cos(\theta_2 - \theta_1)$.