

### INTEGRAL

Suponhamos uma torneira aberta em um recipiente e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos  $[0, T]$ , é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por  $Q(t)$  a quantidade de água no recipiente no instante  $t$  e introduzindo instantes intermediários  $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = T$ , a variação no período  $[0, T]$  é a soma das variações nos subintervalos temporais:

$$(1) \quad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^n [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n \Delta Q|_{[t_{i-1}, t_i]} .$$

A taxa de variação de  $Q = Q(t)$  em  $[t_{i-1}, t_i]$  é a vazão num determinado instante  $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$  (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação). Isto é, pondo  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ,

$$(2) \quad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1}, t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\bar{t}_i) .$$

Combinando (1) e (2) obtemos,

$$(3) \quad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1}, t_i]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^n Q'(\bar{t}_i) \Delta t_i .$$

Definimos então **a integral de  $Q'$**  [que notamos  $\int_0^T Q'(t) dt$ ] como o limite dos somatórios,

$$\sum_{i=1}^n Q'(c_i) \Delta t_i , \quad c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i] ,$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero. Assim, se tal limite existir, e ele existe se  $Q'$  é contínua, temos,

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t) dt \quad \blacksquare$$

**Interpretação:** a variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado. Retornem a ela ao estudarem no Cálculo III o Teorema da Divergência, ou de Gauss.

Notando que  $Q$  é uma primitiva de  $Q'$  e trocando  $Q'$  por  $f$  é fácil ver que podemos reenciar o resultado acima como: dada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $F$  uma primitiva de  $f$  temos,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

Os cálculos acima constituem com um mínimo de cuidados uma demonstração do 1º Teorema Fundamental do Cálculo, como mostramos a seguir.

**1º Teorema Fundamental do Cálculo:** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e tal que  $F' = f$ . Então,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

**Prova:**

Por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i ,$$

onde  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  é uma **partição** de  $[a, b]$ ,  $|\mathcal{P}| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$  é a **norma** da partição  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{E} = \{c_1, \dots, c_n\}$  é uma **escolha** arbitrária de pontos  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$  subordinada à partição  $\mathcal{P}$  e

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i ,$$

é a **soma de Riemann** relativa à partição  $\mathcal{P}$  e à escolha  $\mathcal{E}$ .

Seja  $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . Temos,

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots [F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

e, pelo TVM para Derivadas, existe  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que  $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \Delta x_i$ . Logo, como  $F'(c_i) = f(c_i)$ , a soma de Riemann de  $f$  relativa à esta partição  $\mathcal{P}$  e a esta particular escolha  $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  é

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n F'(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a) .$$

Assim, para toda partição  $\mathcal{P}$  existe uma escolha  $\mathcal{E}$  tal que o valor da soma de Riemann correspondente é  $F(b) - F(a)$ . Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido:  $F(b) - F(a)$  ■

Assumiremos neste texto o seguinte resultado,

**Teorema:** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f$  é integrável.

**Prova:** Vide H. L. Guidorizzi, Cálculo 1, 5ª ed., LTC Editora, pp 519-525 ■

Passamos então a provar o intuitivo e importante resultado,

**Teorema:** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $f \geq 0$  e  $f(x_0) > 0$  para algum  $x_0 \in [a, b]$ . Então,

$$\int_a^b f(x) dx > 0 .$$

**Prova:**

Suporemos  $x_0 \in (a, b)$  pois a demonstração é semelhante nos casos  $x_0 = a$  e  $x_0 = b$ .

Por continuidade, existe um intervalo  $J = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$  tal que

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}, \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r].$$

Então, a função  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (vide figura abaixo) definida por,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [a, x_0 - r] \text{ ou se } x \in [x_0 + r, b], \\ \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} & \\ \text{linear sobre o segmento } [x_0 - r, x_0], & \\ \text{linear sobre o segmento } [x_0 + r, b], & \end{cases}$$

é contínua, satisfaz  $f(x) \geq \varphi(x), \forall x \in [a, b]$ , e ainda,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx = \int_{x_0-r}^{x_0+r} \varphi(x) dx = \frac{f(x_0)r}{2} > 0. \quad \blacksquare$$

**1º TVM para Integrais:** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  contínua. Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

**Prova:**

Se  $f$  é constante é óbvio que em qualquer  $c$  em  $(a, b)$  a igualdade afirmada é satisfeita.

Se  $f$  não é constante, sejam  $m = f(x_1)$  e  $M = f(x_2)$  o mínimo e máximo de  $f$ , respectivamente. Então,  $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$ , e existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $m < f(x_0) < M$ , e como  $f$  contínua, obtemos  $\int_a^b [f(x) - m] dx > 0$  e  $\int_a^b [M - f(x)] dx > 0$ . Logo,

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx, \quad \text{donde} \quad m < \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} < M,$$

e portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $c \in (x_1, x_2)$  (ou  $(x_2, x_1)$ ) tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad \blacksquare$$

Passamos então a provar o,

**2º Teorema Fundamental do Cálculo:** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então, está bem definida a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

e ainda,  $F$  é uma primitiva de  $f$ . Isto é,  $F$  é derivável e  $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ .

**Prova:**

Utilizando propriedades elementares de integrais e o TVM para integrais temos,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \frac{f(c)h}{h} = f(c)$$

para algum  $c = c(h)$  entre  $x$  e  $x + h$ . Se  $h \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow x$  e devido à continuidade de  $f$  segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c(h)) = f(x),$$

o que prova que  $F$  é derivável e que  $F' = f$  ■

**2º TVM para Integrais** Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  e  $g$  contínuas, com  $g \geq 0$  e  $\int_a^b g(x) dx > 0$ . Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$(**) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

**Prova:**

Sejam  $m = f(x_1)$  e  $M = f(x_2)$  o mínimo e máximo de  $f$ , respectivamente. Então,  $\forall x \in [a, b]$  temos  $m \leq f(x) \leq M$  e ainda,  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ . Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

**Caso 1:** Se  $m < \gamma < M$ , pelo TVI existe  $c \in (x_1, x_2)$  (ou  $(x_2, x_1)$ ) tal que  $f(c) = \gamma$ .

**Caso 2:** Se  $\gamma = M$  então  $\int_a^b [M - f(x)]g(x) dx = 0$  e portanto, como  $[M - f(x)]g(x) \geq 0$ , temos  $[M - f(x)]g(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ , e como  $g$  não se anula em algum intervalo aberto  $J$ , segue que  $f$  é então constante e igual a  $M$  em  $J$  e assim, todo  $c$  em  $J$  satisfaz (\*\*).

**Caso 3:** ( $\gamma = m$ ) Basta aplicar o Caso 2 ao par de funções  $-f$  e  $g$  ■

**Interpretação:** Se  $f$  é contínua,  $f$  assume a sua média ponderada por  $g \geq 0$  se  $\int_a^b g(t) dt > 0$ .

**Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Indefinida):** Sejam  $f$  e  $g$  deriváveis em  $(a, b)$ . Então,  $f'g$  admite primitiva em  $(a, b)$  se e só se  $fg'$  também admite e, neste caso,

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx .$$

**Prova:**

Pela fórmula  $(fg)' = f'g + fg'$  temos

$$fg' = (fg)' - f'g,$$

donde concluímos que  $\psi$  é uma primitiva de  $f'g$  se e somente se  $fg - \psi$  é uma primitiva de  $fg'$ . Isto é,  $\psi' = f'g \Leftrightarrow (fg - \psi)' = fg'$  ■

**Notação:** Usualmente lembramos da fórmula de integração por partes escrevendo,

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

**Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Definida):** Sejam  $f$  e  $g$  funções com derivadas contínuas em  $[a, b]$ . Então,

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

**Prova:** Pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

Da fórmula  $(fg)' = f'g + fg'$  a da linearidade da integral definida segue que,

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Eliminando  $\int_a^b (fg)'(x) dx$  das duas equações acima obtidas concluímos a tese ■

**Teorema (Mudança de Variável na Integral Indefinida):** Seja  $I$  um intervalo e consideremos  $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ . Suponhamos que  $\varphi : y \in J \mapsto x = \varphi(y) \in I$ ,  $J$  um intervalo, é inversível e derivável com inversa  $\varphi^{-1} : x \in I \mapsto y = \varphi^{-1}(x) \in J$  também derivável. Se

$$\int f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy = F(y) + k, y \in J \text{ e } k \text{ fixo em } \mathbb{R},$$

então,

$$\int f(x) dx = F(\varphi^{-1}(x)) + k.$$

**Prova:**

Aplicando a regra da cadeia, a hipótese sobre  $F$  e novamente a regra da cadeia obtemos,

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi^{-1})'(x) &= F'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \\ &= f(x) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Teorema (Mudança de Variável na Integral Definida):** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  tal que  $\varphi'$  é contínua e  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$ . Então,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y) dy.$$

**Prova:**

Como  $f$ ,  $\varphi$  e  $\varphi'$  são contínuas, as duas integrais definidas acima existem. Ainda, por ser contínua  $f$  admite uma primitiva  $F$  e então, pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ainda mais, pela regra da cadeia temos

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'(\varphi(y))\varphi'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$$

e então, aplicando novamente o 1º TFC obtemos

$$\int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y) dy = (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \blacksquare$$