MAT 143 - CÁLCULO I - IOUSP

1 semestre de 2010

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS: CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO, CONCAVIDADES E PONTOS DE INFLEXÃO, ASSSÍNTOTAS E CONDIÇÕES PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS

Definições: Seja $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ e A um subconjunto não vazio do domínio de f.

- f é **estritamente crescente** em A se $\forall\ s,t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$.
- f é **estritamente decrescente** em A se $\forall\ s,t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) > f(t)$
- f é **crescente** em A se $\forall\ s,t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$
- f é **decrescente** em A se $\forall\ s,t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) \geq f(t)$.

Observação: Na definição acima, se $A = \mathrm{Dom}(f)$ dizemos apenas que f é, respectivamente, ou estritamente crescente ou estritamente decrescente ou crescente ou decrescente.

Teorema 1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e, derivável em (a,b).

(i) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$, então f é estritamente crescente.

(ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$, então f é estritamente decrescente.

Prova:

(i) Dados $s,t \in [a,b]$, com $s > t$, pelo TVM existe $c \in (t,s)$ tal que

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(c) > 0 \implies f(s) - f(t) > 0 \implies f(s) > f(t)\ .$$

(ii) Basta aplicar o item (i) à função $-f$ ∎

Se a função f é derivável em p, a equação da **reta tangente** em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é:

$$T\ :\ y - f(p) = f'(p)(x-p) \quad \text{ou} \quad T\ :\ y = f(p) + f'(p)(x-p) \quad (x \in \mathbb{R})\ .$$

Abusando a notação a reta tangente T em $(p, f(p))$ é o gráfico da **função afim** T,

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)\ ,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Observação: Mudando a notação, $P_1(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$ é um polinômio de grau 1 (um) na variável real x, denominado **polinômio de Taylor de ordem 1 de f no ponto** p.

Definição. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ tem **concavidade para cima** no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x)\,,$$

qualquer que seja a reta tangente T em $(p, f(p))$, com $p \in I$, e $x \in I$, $x \neq p$.

Definição. Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ tem **concavidade para baixo** no intervalo aberto I se

$$f(x) < T(x)\,,$$

qualquer que seja a reta tangente T em $(p, f(p))$, com $p \in I$, e $x \in I$, $x \neq p$.

Definição. Dada $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ contínua em p, p é **ponto de inflexão** de f se existir um intervalo $(a, b) \subset \mathrm{Dom}(f)$ tal que f tem concavidades de nomes contrários em (a, p) e em (p, b).

Definição. Seja p um ponto de inflexão de $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$.

- Se $f'(p) = 0$, então p é **ponto de inflexão horizontal** de f.
- Se $f'(p) \neq 0$, então p é **ponto de inflexão oblíquo** de f.

Teorema 2. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável.

(i) Se $f''(x) > 0$ em (a, b) então f tem a concavidade para cima em (a, b).

(ii) Se $f''(x) < 0$ em (a, b) então f tem a concavidade para baixo em (a, b).

Prova:

(i) Seja $p \in (a, b)$ e consideremos $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$, $x \in (a, b)$ e a diferença,

$$\varphi(x) = f(x) - T(x)\,, x \in (a, b)\ .$$

Como $\varphi'' = f'' > 0$ então φ' é crescente, sendo que $\varphi'(p) = f'(p) - f'(p) = 0$. Desta forma temos, $\varphi'(x) > 0$ se $x > p$ e $\varphi'(x) < 0$ se $x < p$ e portanto

$$\varphi \ \text{ é estrita/e crescente em } [p, b) \ \text{ e } \ \text{ estrita/e decrescente em } (a, p] \ \text{ e } \ \varphi(p) = 0.$$

Consequentemente,

$$x > p \Longrightarrow \varphi(x) > \varphi(p) = 0 \ \text{ e } \ x < p \Longrightarrow \varphi(x) > \varphi(p) = 0\ .$$

Logo, se $x \neq p$ temos $\varphi(x) = f(x) - T(x) > 0$ e assim, $f(x) > T(x)$.

(ii) Basta trocar f por $-f$ e aplicar o item (i) ■

Uma interpretação para o Teorema 2.

Suponhamos que a variável é temporal. Se $f'' > 0$ sobre (a,b), as retas tangentes à curva descrita por uma partícula que se move ao longo do gráfico de f são tais que suas inclinações (coeficientes angulares) aumentam com o transcorrer do tempo. Logo, a concavidade é voltada para cima. A interpretação é análoga se $f'' < 0$ $\blacksquare$

Definição. $C^2\Big((a,b)\Big) = \Big\{f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tais que f, f' e f'' são contínuas$\Big\}$.

Proposição 1. (Uma condição necessária para que um ponto seja de inflexão):
Se $f \in C^2\Big((a,b)\Big)$ e p é ponto de inflexão de f então $f''(p) = 0$.
Prova:

Se $f''(p) \neq 0$ devido à continuidade de f'' existe um subintervalo (c,d) contido em (a,b) e contendo p tal que $f''(x) > 0$ para $x \in (c,d)$ e portanto p não é ponto de inflexão $\lightning$

Exemplo 1. A função $f(x) = x^3$ tem em $p = 0$ um ponto de inflexão horizontal (verifique).

Exemplo 2. A derivada segunda em um ponto p nula, $f''(p) = 0$, não garante que o ponto seja de inflexão, como mostra o caso da função $f \equiv 1$ e das funções $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, em $p = 0$.

Exemplo 3. A hipótese f'' contínua é necessária na Proposição 1, como mostra a função,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x \leq 0 \ . \end{cases}$$

Pois, verifique, $p = 0$ é ponto de inflexão de f mas não existe $f''(0)$ (sendo $f'(0) = 0$) $\blacksquare$

Definição. Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. A reta $y = mx + n$ é uma **assíntota** para f se

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \ .$$

Se $m = 0$ temos uma **assíntota horizontal** e se $m \neq 0$ temos uma **assíntota oblíqua**.
Observação: Valem definições análogas para $x \to -\infty$.

Observações. Se f é uma função racional,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p \text{ e } q \text{ polinômios}, \ m \text{ o grau de } p \text{ e } n \text{ o grau de } q,$$

consideremos a diferença $m - n$, o grau de p menos o grau de q. Temos,

- Se $m - n \leq 1$ então f admite assíntota.
- Se $m - n = 0$ ou $m - n = 1$, basta dividir os polinômios para determinar a assíntota.
- Se $m - n < 0$ (grau de q maior que grau de p), $y = 0$ (o eixo Ox) é uma assíntota.

Condição necessária para a existência da assíntota: Notemos que

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-n]=0 \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-mx-n}{x}=0 \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\ .$$

Assim, se $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\notin\mathbb{R}$ f não tem assíntota para $x\to+\infty$.

Um método para determinar a existência de uma assíntota de f para $x\to+\infty$: Verificada a condição de existência acima computamos o limite,

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]\ .$$

Se tal limite é um número real, vemos facilmente que $y=mx+n$ é uma tal assíntota de f.

Definições. Sejam $f:\mathrm{Dom}(f)\to\mathbb{R}$ uma função, $A\subset\mathrm{Dom}(f)$ e $p\in A$.

- $f(p)$ é o **valor máximo** de f em A, ou p é **um ponto de máximo** de f em A se

$$f(p)\geq f(x)\,,\ \forall x\in A\ .$$

- $f(p)$ é o **valor mínimo** de f em A, ou p é **um ponto de mínimo** de f em A se

$$f(p)\leq f(x)\,,\ \forall x\in A\ .$$

- $f(p)$ é o **valor máximo global** de f, ou p é um **ponto de máximo global** de f, se para todo $x\in\mathrm{Dom}(f)$, $f(p)\geq f(x)$.
- $f(p)$ é o **valor mínimo global** de f, ou p é um **ponto de mínimo global** de f, se para todo $x\in\mathrm{Dom}(f)$, $f(p)\leq f(x)$.
- p é **ponto de máximo local** de f se existir $r>0$ tal que

$$f(p)\geq f(x)\,,\quad \forall x\in(p-r,p+r)\cap\mathrm{Dom}(f)\ .$$

- p é **ponto de mínimo local** de f se existir $r>0$ tal que

$$f(p)\leq f(x)\,,\quad \forall x\in(p-r,p+r)\cap\mathrm{Dom}(f)\ .$$

- os pontos de máximo e minimo, globais e locais, de uma função são ditos **extremantes globais** e **extremantes locais**, respectivamente.
- se $f'(p)=0$, p é um **ponto crítico** ou **ponto estacionário**.
- Os valores máximo e mínimo globais são também chamados **máximo e mínimo absolutos** e os pontos de máximo e mínimo globais são também chamados de **pontos de máximo e mínimo absolutos**.

- Os valores de máximo e mínimo de f em A são também ditos **valores de máximo e mínimo de f relativos/restritos a** A e os pontos de máximo e mínimo de f em A são também ditos **pontos de máximo e mínimo de f relativos/restritos a** A.

Terema 3 (Condição Necessária para Máximos e Mínimos). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b). Se $x_0 \in (a,b)$ é ponto de máximo ou mínimo, local, de f então $f'(x_0) = 0$.

Prova:

Trocando f por $-f$ se necessário, podemos supor x_0 um ponto de mínimo local. Assim, se $h \neq 0$ é suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in (a,b)$ temos $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$ e

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0\,, \text{ se } h > 0\,, \quad \text{e} \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0\,, \text{ se } h < 0\,.$$

Logo, como $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ temos $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$ e então $f'(x_0) = 0$ ■

Teorema 4. (Condição Suficiente para Máximo e Mínimo Locais). Seja $f \in C^2\big((a,b)\big)$ e $p \in (a,b)$ um ponto crítico de f. Então,

(i) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \implies p$ é um ponto de mínimo local.

(ii) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \implies p$ é um ponto de máximo local.

Prova:

(i) Devido à continuidade de f'' existe um intervalo (c,d) contendo p no qual $f'' > 0$. Então, no intervalo (c,d), f' é crescente sendo que $f'(p) = 0$. Logo, no intervalo (c,p) temos $f' < 0$ e f estritamente decrescente em $(c,p]$ e no intervalo (p,c) temos $f' > 0$ e f estritamente crescente. Portanto, $f(p)$ é ponto de mínimo no intervalo (c,d)

(ii) Basta aplicar o item (i) à função $-f$ ■