Curso: MAT 143 - CÁLCULO para CIÊNCIAS BIOLÓGICAS - FCFUSP
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Primeiro Semestre de 2010

LISTA 0 - GABARITO

1. **Binômio de Newton**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ .$$

Solução 1 (Combinatória) Por convenção $0! = 1$ e portanto, $\binom{n}{0} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Temos, $(a+b)^n = (a+b)(a+b)......(a+b) = c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + ... + c_1 ab^{n-1} + c_0 b^n$ com os coeficientes $c_i \in \mathbb{N}$. 'Imaginando' n caixas, cada uma só com os elementos a e b, cada parcela do desenvolvimento de $(a+b)^n$ pode ser vista como oriunda de n-retiradas, uma de cada caixa, ou de a ou de b. O número de 'formas' que é possível retirar a n-vezes para formar a^n é, evidentemente 1. Logo, $c_n = 1$. Formamos $a^p b^{n-p}$ retirando a p vezes e para tal temos na primeira retirada n possíveis caixas, na segunda $n-1$ e na p-ésima retirada $n-p+1$ possíveis caixas. O número de repetições, por não importar a caixa de onde retiramos a é $p!$. Assim, o coeficiente de $a^p b^{n-p}$ é $\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Solução 2 (Indução) Seja $X = \{n \in \mathbb{N} \mid$ a fórmula é verdadeira $\}$. Provemos $X = \mathbb{N}$.

Caso $n = 1$: temos $(a+b)^1 = a + b$ e $\sum_{p=0}^{p=1} \binom{1}{p} a^b b^{1-p} = \binom{1}{0}a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a + b$. Logo, $1 \in X$.

(Passo de indução) Suponhamos a fórmula válida para $m \in \mathbb{N}$ e provemo-la para $m = 1$.

Temos $(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m$ e, por hipótese de indução $[(a+b)^m = \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p}]$,

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)\sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p} = a\sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p} + b\sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m-p} =$$

$$= \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^{p+1}\, b^{m-p} + \sum_{p=0}^{p=m} \binom{m}{p} a^p\, b^{m+1-p}\ .$$

No primeiro dos dois últimos somatórios acima fazemos a substituição $i = p + 1$. No segundo apenas trocamos a letra p por i. Obtemos assim,

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{i=1}^{i=m+1} \binom{m}{i-1} a^i\, b^{m+1-i} + \sum_{i=0}^{i=m} \binom{m}{i} a^i\, b^{m+1-i} =$$

$$\Big[\ \sum_{i=1}^{i=m} \binom{m}{i-1} a^i\, b^{m+1-i} + a^{m+1}b^0\ \Big] + \Big[\ a^0 b^{m+1} + \sum_{i=1}^{i=m} \binom{m}{i} a^i\, b^{m+1-i}\ \Big] =$$

$$= a^{m+1}b^0 + \sum_{i=1}^{i=m} \left[\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i} \right] a^i\, b^{m+1-i} + a^0 b^{m+1}\ .$$

Por último,

$$\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i} = \frac{m!}{(i-1)!(m-1)!}\left[\frac{1}{m-i+1} + \frac{1}{i}\right] = \frac{(m+1)m!}{i(i-1)!(m-1)!} = \binom{m+1}{i} \ \blacksquare$$

2. **Progressão Geométrica** $1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   Prova Somando as equações,

$$\begin{cases} s_n & = 1 + a + a^2 + ... + a^n \\ -as_n = & -a - a^2 - .... - a^n - a^{n+1}, \end{cases}$$

   obtemos $(1-a)s_n = 1 - a^{n+1}$ $\blacksquare$

3. **Uma Fatoração Polinomial** $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1), \forall n \in \mathbb{N}$.

   Solução 1 É claro que $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = x(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) + -(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x) - (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1) = x^n - 1$.

   Solução 2 Pelo ítem 2, $1 - a^{n+1} = (1-a)(1 + a + a^2 + ... + a^n)$, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Trocando o sinal na equação e ainda a por x e, pondo $m = n+1$ temos,

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + ... + x + 1)\,, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N} \quad \blacksquare$$

4. **Um Produto Notável** $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}$.

   Prova Substituindo $x = \frac{a}{b}$ na identidade $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$ obtemos,

$$\frac{a^n}{b^n} - 1 = (\frac{a}{b} - 1)(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + ... \frac{a^{n-i}}{b^{n-i}} + ... + \frac{a}{b} + 1) .$$

   Multiplicando a equação acima por b^n nos dá,

$$a^n - b^n = (\frac{a}{b} - 1)\, b^n\, (\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + ... + \frac{a^{n-i}}{b^{n-i}} + ... + \frac{a}{b} + 1) = (\frac{a}{b} - 1)\,(a^{n-1}b + ... + a^{n-i}b^i + ... + ab^{n-1} + b^n) =$$

$$= \frac{a-b}{b}\,(a^{n-1}b + ... + a^{n-i}b^i + ... + ab^{n-1} + b^n) = (a-b)(a^{n-1} + ... + a^{n-i}b^{i-1} + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \blacksquare$$

5. **Teorema** Todo polinômio de grau ímpar e coeficientes reais têm ao menos uma raíz real.

   Prova Basta verificarmos "Se $P(x) = a_n x^n + ...a_1 x + a_o$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$, $a_n \neq 0$, é um polinômio com coeficientes reais de grau $n \geq 1$ sem raízes reais então grau(P) é par".

   Verificação Como o conjugado da soma e do produto de números em $\mathbb{C}$ é a respectiva soma e produto dos conjugados e o conjugado de $x \in \mathbb{R}$ é x, dada uma raíz $z \in \mathbb{C}$ temos,

$$0 = \overline{0} = \overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = a_n \overline{z}^n + ... + a_1 \overline{z} + a_0 = P(\overline{z}).$$

   Logo, $\overline{z}$ é raíz de P, $z \neq \overline{z}$ pois $z \notin \mathbb{R}$ e, $Q(x) = (x-z)(x-\overline{z})$ divide P. Porém, $Q(x) = x^2 - \overline{z}x - zx + |z|^2 = x^2 - (\overline{z} + z)x + |z|^2 = x^2 - 2Re(z)x + |z|^2$ têm coeficientes reais e assim, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ também. Donde, é fácil ver, z e $\overline{z}$ têm igual multiplicidade. Logo, se $z_1, \overline{z_1}, ..., z_k, \overline{z_k}$ são as raízes de P, sem repetição, m_i a multiplicidade de z_i, então $P(x) = a_n (x-z_1)^{m_1}(x-\overline{z_1})^{m_1} ... (x-z_k)^{m_k}(x-\overline{z_k})^{m_k}$ e $n = m_1 + m_1 + ... + m_k + m_k$ é par $\blacksquare$

6. **Raízes de** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$ $n \geq 1$, **com coeficientes,** a_i**, inteiros:**

   (i) Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é raíz então $\alpha | a_o$.

   (ii) Se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raíz, mdc$(p,q) = 1$, então p divide a_o e q divide a_n.

   Prova (i) Sendo $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = 0$ temos,

   $$a_0 = -\ a_n\alpha^n -\ a_{n-1}\alpha^{n-1}\ - .... -\ a_1\alpha.$$

   Assim, como $\alpha \mid a_n\alpha^n, ..., \alpha \mid a_1\alpha$ então $\alpha \mid -(a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha) = a_0$.

   (ii) Mostremos primeiro que $p \mid a_0$. Temos, $0 = P(\frac{p}{q}) = a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_1\frac{p}{q} + a_0$. Logo,

   $$0 = a_np^n\ +\ a_{n-1}p^{n-1}q\ +\ ....\ +\ a_1pq^{n-1}\ +\ a_0q^n\ .$$

   Como p divide a_np^n , $a_{n-1}p^{n-1}q$ ....., a_1pq^{n-1} então $p \mid -(a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1})$. Isto é, $p \mid a_0q^n$ e portanto, como mdc$(p,q) = 1$, $p \mid a_0$.

   Ainda, q divide a_0q^n , a_1pq^{n-1} ....,$a_{n-1}p^{n-1}q$ e então $q \mid -(a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} + a_0q^n)$. Isto é, $q \mid a_np^n$ e assim, como mdc$(p,q) = 1$, $q \mid a_n$ ∎

7. Resolva algumas equações de segundo grau sem a **fórmula de Baskhara** e então prove-a.

   A fórmula Seja $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, uma equação do segundo grau em x. Temos,

   $$ax^2\ +\ bx\ +\ c\ =\ a(x^2\ +\ \frac{b}{a}x\ +\ \frac{c}{a})\ =\ a\Big[\ (x\ +\ \frac{b}{2a})^2\ -\ (\frac{b}{2a})^2\ +\ \frac{c}{a}\ \Big]\ =$$

   $$=\ a\Big[\ (x\ +\ \frac{b}{2a})^2\ +\ \frac{4ac-b^2}{4a^2}\ \Big]\ .$$

   Logo, x é raíz se, e só se, $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ e extraindo a raíz quadrada complexa, que admite dois valores se o radicando é não nulo, obtemos,

   $$x\ +\ \frac{b}{2a}\ =\ \pm\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,$$

   qualquer que seja a escolha feita para $\sqrt{\Delta}$. Consequentemente,

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad ∎$$

8. Sejam α , β em $\mathbb{R}$.

   (a) $sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha$ (b) $cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sen\alpha sen\beta$.

   (c) $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta$ (d) $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$.

9. **Desigualdade Triangular** $|a+b| \le |a| + |b|, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

   Prova Prova É claro que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x \le |x|$ e $-x \le |x|$. Logo,

$$\begin{cases} a+b \ \ge 0 \implies |a+b| = a+b \le |a| + |b|, \\ a+b \ \le 0 \implies |a+b| = -(a+b) = -a-b \le |a| + |b| \end{cases} \quad \blacksquare$$

10. O número $\sqrt{2}$ **é irracional**.

    Prova (Por Absurdo) É claro que se $p \in \mathbb{N}$, p^2 é par $\Leftrightarrow$ p é par (p^2 ímpar $\Leftrightarrow$ p é ímpar). Suponhamos, por absurdo, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Então, existem $p, q \in \mathbb{N}$, mdc$(p,q) = 1$, com $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Logo, elevando ao quadrado, $p^2 = 2q^2$ e assim, p^2 é par, p é par e existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2m$. Substituindo temos $\sqrt{2} = \frac{2m}{q}$ que, também quadradando, nos dá,$2q^2 = 4m^2$ e, simplificando, $q^2 = 2m^2$. Logo, q é também par e então 2 divide p e q $\lightning$

11. Mostre, no **plano de Argand-Gauss**, que se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, com a, $b \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 = 1$, existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que,

$$z = cos\theta + isen\theta \ .$$

12. Se $z_1 = \cos\theta_1 + isen\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + isen\theta_2$ então,

$$z_1 z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2) \ .$$

    Prova Temos, pelos ítens 8(c) e 8(d),

$$z_1 z_2 \ = \ (\cos\theta_1 + isen\theta_1)(\cos\theta_2 + isen\theta_2) =$$

$$= (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2) + i(\cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 \cos\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + sen(\theta_1 + \theta_2)i \quad \blacksquare$$

13. Definindo $z = e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$ (**Fórmula de Euler**) temos a **Fórmula de Moivre**,

$$z^n = (cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta) = e^{in\theta} \ , \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

    Prova Consequência imediata do item anterior $\blacksquare$

14. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, o **módulo** de z é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o **conjugado** é $\overline{z} = a - ib$.

    (a) Se $z \neq 0$ então $\exists ! \, \theta \in \mathbb{R}$, módulo 2π, tal que $z = |z| e^{i\theta}$.

    (b) Represente z, θ, $|z|$ e $\overline{z}$ (simétrico a z em relação ao eixo real).

    (c) $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = |\overline{z}|$, $|Re(z)| \le |z|$ e $|Im(z)| \le |z|$.

    (d) Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \ \overline{z_2}$ e $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

    (e) Se $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, então $\overline{z} = e^{-i\theta}$.

Prova

(a) Basta aplicar o item 11 a $\frac{z}{|z|}$.

(c) Segue de $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ e $\overline{\overline{z}} = z$.

(d) A primeira identidade deixamos ao leitor. A segunda segue da primeira e do item (c) pois, $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2|z_2|^2$.

(e) Claramente, $\overline{z} = \overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + isen\theta} = \cos\theta - isen\theta = \cos(-\theta) + isen(-\theta) = e^{-i\theta}$ ∎

15. **Desigualdade Triangular**: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Prova Pelos ítens 14(c) e 14(d),

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{\overline{z_1}z_2} + |z_2|^2 =$$

$$= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 =$$

$$= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$ ∎

16. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ então, $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Prova Consequência imediata do item 12 ∎

17. Se $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $|\omega| = 1$, então,

$$\exists\ \omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \overline{\omega} = a - ib\ .$$

Prova Segue de $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |\omega|^2 = 1$ ∎

18. Sejam $\omega_2 = x_2 + iy_2 = e^{i\theta_2}$ e $\omega_1 = x_1 + iy_1 = e^{i\theta_1}$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, números complexos unitários (isto é, de comprimento 1). Então,

$$(a) \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{i(\theta_2-\theta_1)} = cos(\theta_2-\theta_1) + isen(\theta_2-\theta_1)\ ,$$

$$(b) \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{x_2+iy_2}{x_1+iy_1} = (x_2+iy_2)(x_1-iy_1) = (x_1x_2+y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)\ .$$

Prova (a) Pelos itens 14(e) e 12 temos, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = e^{i\theta_2}(e^{i\theta_1})^{-1} = e^{i\theta_2}e^{-i\theta_1} = e^{i(\theta_2-\theta_1)}$.

(b) Segue imediatamente do item 17 ∎

19. **Fórmula para o ângulo entre as representações dos números z_1 e z_2 em $\mathbb{C}^*$**, $z_j = x_j + iy_j = |z_j|e^{i\theta_j}$, com $x_j, y_j, \theta_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, 2$,

$$cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_1||z_2|} .$$

Prova Segue de 18, (a) e (b), aplicado a $\omega_2 = \frac{x_2}{|z_2|} + \frac{y_2}{|z_2|}i$ e $\omega_1 = \frac{x_1}{|z_1|} + \frac{y_1}{|z_1|}i$.

20. **Distância de Ponto a Reta** A equação geral de uma reta no plano cartesiano é: D : $ax + by + c = 0$; a ou b não nulo. Dado $P_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_o à reta D é :

$$|\overline{PD}| = \frac{|\ ax_o\ +\ by_o\ +\ c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Prova Notemos m_r o coeficiente angular de uma reta r. As retas S perpendiculares a D tem coeficiente angular m_S, $m_S.m_D = -1$ e, introduzindo um parametro d, equação geral: $S\ :\ -bx + ay + d = 0,\ d \in \mathbb{R}$ e entre tais a por $P_o = (x_o, y_o)$ é tal que $d = bx_o - ay_o$. Isto é,

$$S_{P_o}\ : -bx + ay + (bx_o - ay_o) = 0.$$

Determinemos $P_1 = (x_1, y_1) = D \cap S_{P_o}$ resolvendo,

$$(*)\quad \begin{cases} ax + by = -c\,, \\ -bx + ay = ay_o - bx_o\ . \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a, a segunda por $-b$, e então somando-as temos, $x_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(b^2x_o - aby_o - ac)$ e,
analogamente, multiplicando a primeira por b e a segunda por a e somando-as, $y_1 = \frac{1}{a^2+b^2}(-abx_o + a^2y_o - bc)$.
Computemos agora o quadrado da distância de $P_o = (x_o, y_o)$ a $P_1 = (x_1, y_1)$,
$|\overline{P_oP_1}|^2 = [\ x_o\ -\ \frac{1}{a^2+b^2}(\ b^2x_o - aby_o - ac\ )\ ]^2\ +\ [\ y_o\ -\ \frac{1}{a^2+b^2}(\ -abx_o + a^2y_o - bc\ )\ ]^2 =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ (\ a^2x_o + aby_o\ +\ ac\ )^2\ +\ (\ abx_o\ +\ b^2y_o + bc\ )^2\ ] =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ a^2(ax_0\ +\ by_0\ +\ c)^2\ +\ b^2(ax_0\ +\ by_0\ +\ c)^2\ ] =$
$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}[\ (a^2 + b^2)\ (ax_o\ +\ by_o\ +\ c)^2\ ] = \frac{(ax_o\ +\ by_o\ +\ c)^2}{a^2+b^2}.$

Segunda Prova Reescrevendo (*) na notação matricial temos,

$$(**)\quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix}.$$

É fácil constatar que se $M \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ é inversível , ela e sua inversa são relacionadas por,

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{AD - BC}\begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Assim, a solução de (**) é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c \\ ay_o - bx_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2+b^2}(-ac - aby_o + b^2x_o) \\ \frac{1}{a^2+b^2}(-bc + a^2y_o - abx_o) \end{bmatrix}.$$

A prova agora segue como a anterior ■