**3ª Prova de MAT1352 - Cálculo II - IFUSP**
**21 de dezembro de 2023**

| Q | N |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| Total | |

Nome : ____________________________ ____________________________
NºUSP : __________________________________________________
Professor : Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**É necessário justificar todas as passagens.**
**Boa Sorte! Boas Festas!**

1. Apresente as fórmulas (não é necessário demonstrá-las) para as séries de Taylor reais e em torno da origem $x = 0$ das funções reais abaixo e diga em qual domínio cada fórmula é válida.

   (a) $e^x$.

   (b) $\cos x$.

   (c) $\sin x$.

   (d) $\ln(1 + x)$.

   (e) $\arctan(x)$.

**Resposta.**

(a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots$, para todo $x \in (-1, +1]$.

(e) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$, para todo $x \in (-1, +1]$♣

2. Prove se convergem ou não as séries abaixo.

$$(a) \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3}.$$

$$(b) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,7^n}{n^n}.$$

**Respostas.**

(a) A série dada é de termos positivos. Se $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{k+1}{2k+3} \leq \frac{2k+3}{2k+3} = 1.$$

Segue

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-k},$$

sendo que a série à direita é uma série geométrica de razão $e^{-1} < 1$. Logo, tal série à direita é convergente.

Pelo **Critério da Comparação** concluímos que:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(k+1)e^{-k}}{2k+3} \ \textbf{converge}.$$

(b) A série dada é de termos positivos. Utilizando o **Critério da Razão** e computando o limite para $n \to +\infty$ obtemos

$$\begin{aligned}
\lim \frac{(n+1)!7^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!7^n} &= \lim \frac{7(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} \\
&= \lim \frac{7}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} \\
&= \lim \frac{7}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{7}{e}.
\end{aligned}$$

Então, como

$$\frac{7}{e} > 1,$$

pelo **Critério da Razão** concluímos que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,7^n}{n^n} \ \textbf{diverge} \clubsuit$$

3. Dê os cinco primeiros termos não nulos da expansão em séries de potências (isto é, da expansão em série de Taylor centrada na origem) da função

$$f(x) = \frac{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots}{1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} + \cdots}.$$

**Solução.** Efetuemos a divisão com a tabela abaixo.

| $x^0$ | $x^1$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $\cdots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} + \cdots$ |
| − 1 | 0 | −1 | 0 | 1 | 0 | $\cdots$ | $1 + x + 3x^2 + 4x^3 + 6x^4 \cdots$ |
| 0 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | $\cdots$ | |
| − | 1 | 0 | −1 | 0 | 1 | $\cdots$ | . |
| | 0 | 3 | 4 | 3 | 4 | $\cdots$ | |
| − | | 3 | 0 | −3 | 0 | $\cdots$ | |
| | | 0 | 4 | 6 | 4 | $\cdots$ | |
| − | | | 4 | 0 | −4 | $\cdots$ | |
| | | | 0 | 6 | 8 | $\cdots$ | |

**Resposta.**

$$\frac{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots}{1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} + \cdots} = 1 + x + 3x^2 + 4x^3 + 6x^4 \cdots \clubsuit$$

4. Dê os cinco primeiros termos não nulos da expansão em séries de potências (isto é, da expansão em série de Taylor centrada na origem) de

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

**Solução.**

A função seno é ímpar, a função cosseno é par e a função $\tan(x)$ é ímpar.

Como $\sin x$ é ímpar, destacamos os monômios $x, x^3, x^5, x^7, \ldots$ em sua expansão.

Podemos apresentar a tabela para a função ímpar $\tan(x)$ na forma seguinte.

| $x$ | $x^3$ | $x^5$ | $x^7$ | $x^9$ | $x^{11}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $-\frac{1}{3!}$ | $+\frac{1}{5!}$ | $-\frac{1}{7!}$ | $+\frac{1}{9!}$ | $-\frac{1}{11!}$ | $\cdots$ |
| $-\ 1$ | $-\frac{1}{2!}$ | $+\frac{1}{4!}$ | $-\frac{1}{6!}$ | $+\frac{1}{8!}$ | $-\frac{1}{10!}$ | $\cdots$ |
| $0$ | $+\frac{2}{3!}$ | $-\frac{4}{5!}$ | $+\frac{6}{7!}$ | $-\frac{8}{9!}$ | $+\frac{10}{11!}$ | $\cdots$ |
| $-$ | $+\frac{2}{3!}$ | $-\frac{20}{5!}$ | $+\frac{70}{7!}$ | $-\frac{168}{9!}$ | $+\frac{330}{11!}$ | $\cdots$ |
| | $0$ | $+\frac{16}{5!}$ | $-\frac{64}{7!}$ | $+\frac{160}{9!}$ | $-\frac{320}{11!}$ | $\cdots$ |
| $-$ | | $+\frac{16}{5!}$ | $-\frac{336}{7!}$ | $+\frac{2016}{9!}$ | $-\frac{7392}{11!}$ | $\cdots$ |
| | | $0$ | $+\frac{272}{7!}$ | $-\frac{1856}{9!}$ | $+\frac{7072}{11!}$ | $\cdots$ |
| $-$ | | | $+\frac{272}{7!}$ | $-\frac{9792}{9!}$ | $+\frac{89760}{11!}$ | $\cdots$ |
| | | | $0$ | $+\frac{7936}{9!}$ | $-\frac{82688}{11!}$ | $\cdots$ |
| $-$ | | | | $+\frac{7936}{9!}$ | $-\frac{436480}{11!}$ | $\cdots$ |
| | | | | $0$ | $+\frac{353792}{11!}$ | $\cdots$ |

$$\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots}{x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \frac{7936x^9}{9!} + \frac{353792x^{11}}{11!} + \cdots}$$

**Resposta.**

$$\tan(x) = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \frac{7936x^9}{9!} + \cdots$$

ou

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots \clubsuit$$

5. Enuncie o teorema que apresenta a **Fórmula para a Solução Particular** para Equações Diferenciais Lineares Ordinárias com Coeficientes Constantes e Reais. Apresente as notações e definições necessárias à apresentação do teorema.