

MAT 1352 - Cálculo II - - IFUSP

Lista Extra de Exercícios — Segundo Semestre de 2023

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA EXTRA DE EXERCÍCIOS

1ª PARTE

1. Encontre o raio de convergência, o disco de convergência e uma expressão (uma fórmula fechada) para as seguintes séries de potências.

(a) $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$

(b) $B(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}.$

(c) $C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n z^n.$

(d) $D(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2}.$

(e) $E(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) z^n.$

(f) $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n.$

(g) $G(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3}.$

(h) $H(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(n-2) z^n.$

(j) $J(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 z^n.$

2. Encontre o raio de convergência, e o disco de convergência, das seguintes séries de potências

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 z^n$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} z^n.$

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$

3. (a) Escreva as fórmulas para as funções hiperbólicas complexas $\cosh z$ e $\sinh z$, em termos da função exponencial complexa.
- (b) Escreva as séries de potências para as funções $\cosh z$ e $\sinh z$.
- (c) Derive as séries de potências para $\cosh z$ e $\sinh z$.
- (d) Mostre que $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, para todo z complexo.

=====

2ª PARTE — DIVISÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS.

[Vide <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DivisionPowerSeries.pdf>]

4. Escrevendo $\sinh z$ e $\cosh z$ em séries de potências, encontre os três primeiros termos não nulos da série de potências para a tangente hiperbólica

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}.$$

5. Encontre os três primeiros termos não nulos para o desenvolvimento em séries de potências, em torno da origem, das funções abaixo.

(a) $\frac{e^z}{1+z^2}$.

(b) $\frac{\cos z}{e^z}$.

(c) $\frac{e^z}{\cos z}$.

(d) $\frac{\ln(1+z)}{1+z}$.

(e) $\frac{\ln(1+z)}{e^z}$.

(f) $\frac{\ln(1+z)}{\cos z}$.

(g) $\frac{\sin z}{1+z^2}$.

(h) $\frac{\cos z}{1+z^2}$.

(i) $\frac{\arcsin z}{1+z^2}$.

(j) $\frac{\sinh z}{1+z^4}$.

(k) $\frac{\cosh z}{1+z^4}$.

(l) $\frac{e^{z^2}}{1+z}$.

(m) $\frac{\sin z^2}{1+z}$.

(n) $\frac{\arctan z}{1+z}$.

(o) $\frac{\arctan z}{1+z^3}$.

(p) $\frac{\arcsin z}{1+z}$.

6. Ache os primeiros cinco termos não nulos da série de potências para a divisão

$$\frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots}.$$

7. Ache os primeiros três termos não nulos da série de potências para a divisão

$$\frac{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \dots}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \dots}.$$

8. Ache os primeiros cinco termos não nulos da série de potências para a divisão

$$\frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \dots}{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + \dots}.$$

9. Dê os primeiros quatro termos não nulos da série de potências para a divisão

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots}{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots}.$$

10. Dê os primeiros quatro termos não nulos da série de potências para a divisão

$$\frac{x + 2x^4 + 3x^9 + 4x^{16} + 5x^{25} + 6x^{36} + \dots}{1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots}.$$

3ª PARTE - DIVISÃO EUCLIDEANA X DIVISÃO LONGA

[Vide

<https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DivisionPowerSeriesByPolynomial.pdf>]

11. Efetue a tradicional divisão polinomial (divisão polinomial euclideana) do polinômio $p(x)$ pelo polinômio $q(x)$.

(a) $p(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ e $q(x) = x + 1$.

(b) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $q(x) = x - 1$.

(c) $p(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$ e $q(x) = x^2 + 3x + 2$.

12. Efetue a divisão como séries de potências (divisão longa) de $p(x)$ por $q(x)$.

(a) $p(x) = 24 + 50x + 35x^2 + 10x^3 + x^4$ e $q(x) = 1 + x$.

(b) $p(x) = -2 - x + 2x^2 + x^3$ e $q(x) = -1 + x$.

(c) $p(x) = -18 - 27x - 7x^2 + 3x^3 + x^4$ e $q(x) = 2 + 3x + x^2$.

Compare os exercícios 11 e 12.

13. Efetue a divisão polinomial euclideana e escreva $N(z) = Q(z)D(z) + R(z)$.

(a) $N(z) = z^2 + 1$ e $D(z) = z + 1$.

(b) $N(z) = z^3 + z^2 + 2$ e $D(z) = z + 1$.

14. Efetue a divisão longa de $N(z)$ por $D(z)$.

(a) $N(z) = 1 + z^2$ e $D(z) = 1 + z$.

(b) $N(z) = 2 + z^2 + z^3$ e $D(z) = 1 + z$.

Compare os exercícios 13 e 14.