

MAT 1352 - Cálculo II - IFUSP
Lista 1 de Exercícios - Segundo semestre de 2023
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Calcule as integrais definidas abaixo.

a) $\int_{-1}^1 (2x + 1) dx$

b) $\int_{-2}^1 (x^2 - 1) dx$

c) $\int_0^1 \left(5x^3 - \frac{1}{2} \right) dx$

d) $\int_1^0 (2x + 3) dx$

e) $\int_0^1 \sqrt[8]{x} dx$

f) $\int_0^1 (x + \sqrt[4]{x}) dx$

g) $\int_1^0 (x^7 - x + 3) dx$

h) $\int_0^1 (x + 1)^2 dx$

i) $\int_0^1 (x - 3)^2 dx$

j) $\int_1^2 \frac{1 + t^2}{t^4} dt$

k) $\int_0^3 (u^2 - 2u + 3) du$

l) $\int_{-1}^{+1} \sqrt[3]{t} dt$

m) $\int_1^2 \frac{1 + 3x^2}{x} dx$

n) $\int_{-\pi}^0 \text{sen}3x dx$

o) $\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2}$

p) $\int_{-1}^0 e^{-2x} dx$

q) $\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} dx$

r) $\int_{-1}^{+1} x^3 e^{x^4} dx$

2. Calcule as integrais definidas.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\text{sen}x + \text{sen}2x) dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos2x \right) dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ $\left[\text{Sugestão: } \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos2x \right]$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 x dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 x dx$

3. Calcule a área do conjunto dado. Esboce a região.

- a) A é limitado pelas retas $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ e pelo gráfico de $y = x^3$.
- b) A é limitado pelas retas $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.
- c) $A = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$.
- d) $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
- e) $A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq |\operatorname{sen}x|, 0 \leq x \leq 2\pi\}$.
- f) A é limitado pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^2 - x$, $0 \leq x \leq 2$.
- g) A é limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = 3 - 2x - x^2$, $-1 \leq x \leq 2$.
- h) A é limitado pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^2 + 2x + 5$.
- i) A é limitado pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, $-1 \leq x \leq 1$.
- j) A é limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, $0 \leq x \leq 2$.
- k) A é limitado pelas retas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \operatorname{cos}x$.
- l) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$.
- m) A é limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \operatorname{sen}x$ e $y = \operatorname{cos}x$.
- n) $A = \{(x, y) : x^2 + 1 \leq y \leq x + 1\}$.
- o) $A = \{(x, y) : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$.
- p) A é limitado pelas retas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \operatorname{cos}x$ e $y = 1 - \operatorname{cos}x$.
- q) $A = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } x^3 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}$.

4. Encontre as primitivas.

a) $\int \frac{2x + 3}{x + 1} dx$

b) $\int \frac{x^2}{x + 1} dx$

5. Encontre as primitivas.

a) $\int x e^x dx$

b) $\int x \operatorname{sen}x dx$

c) $\int x^2 e^x dx$

d) $\int x \ln x dx$

e) $\int \ln x dx$

f) $\int x^2 \ln x dx$

g) $\int x \sec^2 x dx$

h) $\int x (\ln x)^2 dx$

i) $\int (\ln x)^2 dx$

j) $\int e^x \operatorname{cos}x dx$

k) $\int x^3 e^{x^2} dx$

l) $\int x^3 \operatorname{cos}x^2 dx$

m) $\int e^{-x} \operatorname{cos}2x dx$

n) $\int x^2 \operatorname{sen}x dx$

6. Simplifique as expressões abaixo, pelo método das frações parciais.

a) $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$

b) $\frac{2x+3}{x(x-2)}$

c) $\frac{x}{x^2-4}$

d) $\frac{1}{1+(x+1)^2}$

e) $\frac{5x+3}{x^2-3x+2}$

f) $\frac{x+1}{x^2-x-2}$

g) $\frac{1}{x^2+4x+8}$

h) $\frac{1}{x^2+x+1}$

i) $\frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}$

j) $\frac{x+1}{x(x-2)(x+3)^2}$

k) $\frac{x^4+x+1}{x^3-x}$

l) $\frac{x+3}{x^3-2x^2-x+2}$

m) $\frac{x^2+1}{(x-2)^3}$

n) $\frac{x^5+3}{x^3-4x}$

o) $\frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}$

p) $\frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}$

q) $\frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3}$

r) $\frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}$

- Suponha α , β , m e n são constantes reais, com $\alpha \neq \beta$. Mostre que existem constantes reais A e B satisfazendo

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

- Sejam $\alpha \neq 0$, β , m e n constantes reais. Mostre as fórmulas abaixo.

a) $\int \frac{1}{x^2-\alpha^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{x-\alpha}{x+\alpha} \right| + k$

b) $\int \frac{1}{\alpha^2+(x+\beta)^2} dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+\beta}{\alpha} \right) + k.$

c) $\int \frac{mu+n}{1+u^2} du = \frac{m}{2} \ln(1+u^2) + n \operatorname{arctgu} + k$

7. (Método das frações parciais) Encontre as primitivas.

a) $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$

b) $\int \frac{2x+3}{x(x-2)} dx$

c) $\int \frac{x}{x^2-4} dx$

d) $\int \frac{1}{1+(x+1)^2} dx$

e) $\int \frac{5x+3}{x^2-3x+2} dx$

f) $\int \frac{x+1}{x^2-x-2} dx$

g) $\int \frac{1}{x^2+4x+8} dx$

h) $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$

i) $\int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2} dx$

j) $\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)^2} dx$

k) $\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x} dx$

l) $\int \frac{x+3}{x^3-2x^2-x+2} dx$

m) $\int \frac{x^2+1}{(x-2)^3} dx$

n) $\int \frac{x^5+3}{x^3-4x} dx$

o) $\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)} dx$

p) $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3} dx$

q) $\int \frac{x^3+4x^2+6x+1}{x^3+x^2+x-3} dx$

r) $\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8} dx$

8. Calcule as áreas das regiões abaixo (suponha $a > 0$ e $b > 0$).

(1) $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

(2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq \sqrt{1+y^2} \text{ e } 2x+y \leq 2\}$.

FÓRMULA DE TAYLOR

1. (Fórmula de Taylor de ordem 1, com resto integral) Se f'' é contínua em $[a, b]$,

$$f(b) = f(a) + f'(a) (b - a) + \int_a^b (b - t) f''(t) dt.$$

2. (Fórmula de Taylor de ordem 2, com resto integral) Se f''' é contínua em $[a, b]$,

$$f(b) = f(a) + f'(a) (b - a) + \frac{f''(a)}{2} (b - a)^2 + \int_a^b \frac{(b - t)^2}{2} f'''(t) dt.$$

3. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2, de f em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$

b) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$

e) $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$

f) $f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$

4. Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

a) $\ln 1,3$

b) $e^{0,03}$

c) $\sqrt[3]{8,2}$

d) $\sqrt{4,1}$

e) $\cos 0,2$

f) $\sin 0,1$