

**Fórmulas de Taylor com Resto Integral, Infinitesimal,  
de Lagrange e de Cauchy**

Almejamos aproximar o valor de uma função  $f$  num ponto  $x_0$  pelos valores de um polinômio em pontos próximos de  $x_0$ . Exibimos fórmulas e condições em que dada  $f$   $n$ -vezes derivável em  $x_0$  ocorra tal aproximação com um polinômio de grau no máximo  $n$ .

As fórmulas mais potentes correspondem àquelas com hipóteses mais fortes: a com resto infinitesimal só requer existir  $f^{(n)}(x_0)$ , a com resto de Lagrange é fácil de aplicar, requer a existência de  $f^{(n+1)}$  numa vizinhança de  $x_0$  e generaliza o TVM, e a com resto integral necessita  $f^{(n+1)}$  integrável e restabelece parte do Teorema Fundamental do Cálculo.

A ordem de apresentação escolhida não segue o “princípio do menos geral para o mais geral” e também não a linha histórica (neste tópico tais opções conflitam). A ordem adotada é a que julgamos mais simples. A abordagem segue uma interpretação aritmética do 2º Teorema Fundamental do Cálculo.

Em 1715, o matemático inglês B. Taylor publicou a descoberta da série de Taylor de uma função.

**Fórmula de Taylor com Resto Integral**

**Obs 1.** Seja  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existem as derivadas  $\varphi^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n + 1$ , com  $\varphi^{(n+1)}$  integrável. Integrando sucessivamente por partes obtemos,

$$\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 1 \cdot \varphi'(t) dt \quad (\text{substituamos } u' = 1 \text{ e } v = \varphi') \\
&= t\varphi'(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 t\varphi''(t) dt \\
&= \varphi'(1) - \int_0^1 t\varphi''(t) dt \\
&= \varphi'(0) + \varphi'(1) - \varphi'(0) - \int_0^1 t\varphi''(t) dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 \varphi''(t) dt - \int_0^1 t\varphi''(t) dt \\
&= \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t) dt \quad (\text{pomos } u' = 1-t \text{ e } v = \varphi'') \\
&= \varphi'(0) - \frac{(1-t)^2}{2} \varphi''(t) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \varphi'''(t) dt \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \varphi^{(3)}(t) dt \quad (\text{pomos } u' = \frac{(1-t)^2}{2} \text{ e } v = \varphi^{(3)}) \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!} \varphi^{(4)}(t) dt = \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= \varphi^{(1)}(0) + \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(0)}{3!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!} (1-t)^n dt \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Teorema 1 (Taylor)**<sup>1</sup> Seja  $f : I = (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f^{(n+1)}$  integrável. Dados  $x_0 \in I$  e  $x \in I$  temos

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

**Prova.**

Consideremos  $\varphi(t) = f(x_0 + t(x-x_0))$ , para  $t \in [0, 1]$ . Pela Obs. 1 segue,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = f(x_0) \\ \varphi(1) = f(x) \\ \varphi'(t) = f'(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0) \\ \varphi''(t) = f''(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^2 \\ \vdots \\ \varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^k, \quad 1 \leq k \leq n+1, \end{array} \right.$$

logo, as derivadas de  $\varphi$  na origem são,

$$\varphi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k, \quad \text{se } 1 \leq k \leq n+1, \quad \text{com}$$

$$\int_0^1 \frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{n!}(1-t)^n dt = \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-t)^n dt =$$

[com a mudança linear de variável  $t \mapsto y = x_0 + t(x-x_0)$ ,  $dy = (x-x_0)dt$  e  $t = \frac{y-x_0}{x-x_0}$ ]

$$= \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(y)(x-x_0)^{n+1}}{n!} \left(1 - \frac{y-x_0}{x-x_0}\right)^n \frac{dy}{x-x_0}$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} (x-y)^n dy .$$

Concluimos usando tais expressões para  $\varphi$  na equação obtida na Obs. 1 ■

---

<sup>1</sup>A Fórmula de Taylor com Resto Integral e a idéia contida nesta prova (a simplificação escolhida é culpa do autor) devem-se a Cauchy (1821), que aperfeiçoou uma idéia de Johann I Bernoulli (1694), que com integração por partes obtivera séries de Taylor similares as publicadas por B. Taylor em 1715.

O polinômio  $P(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$ , de grau no máximo  $n$ , é o polinômio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  no ponto  $x_0$ , e  $R(x) = R_n(x) = f(x) - P_n(x)$  é o resto. A expressão  $R(x) = R(x_0; x) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt$  é a forma integral do resto.

**Corolário 1.** Com as notações acima, se  $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ , onde  $M > 0$ , para todo  $t$  entre  $x_0$  e  $x$ , então temos

$$(a) \quad |R(x)| \leq C|x - x_0|^{n+1}, \quad \text{com } C = \frac{M}{(n+1)!}.$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

**Prova.** O item (b) segue imediatamente de (a). O item (a) é trivial pois

$$|R(x)| \leq \frac{M}{n!} \left| \int_{x_0}^x (x - t)^n dt \right| = \frac{M}{n!} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1} \quad \blacksquare$$

As afirmações no Corolário 1 podem ser escritas introduzindo a muito útil notação de Landau.

**Definição 1.** Se  $g(x)$  e  $h(x)$  são funções definidas numa vizinhança de  $x_0$ , escrevemos

$$(a) \quad g(x) = O(h(x)), \quad \text{se existe } C > 0 \text{ tal que } \begin{cases} |g(x)| \leq C|h(x)|, \\ \text{para todo } x \text{ numa vizinhança de } x_0 \end{cases}$$

Neste caso, dizemos que  $g$  é “ó grande” de  $h$  numa vizinhança de  $x_0$ .

$$(b) \quad g(x) = o(h(x)), \quad \text{para } x \rightarrow x_0, \quad \text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Neste caso, dizemos que  $g$  é “ó pequeno” de  $h$  no ponto  $x_0$ .

Desta forma, reescrevemos o Corolário 1 como

**Corolário 1’.** Com as notações acima, se  $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ , onde  $M > 0$ , para todo  $t$  entre  $x_0$  e  $x$ , então temos

$$(a) \quad R(x) = O((x - x_0)^{n+1}), \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

$$(b) \quad R(x) = o((x - x_0)^n), \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

**Prova.** Óbvio  $\blacksquare$

A condição (b) no Corolário 1' exprime a "ordem de contato" entre duas funções  $g$  e  $h$ , ambas  $n$ -vezes deriváveis no ponto  $x_0$ . Isto é, temos  $g - h = o((x - x_0)^n)$  se e somente se  $g(0) = h(0), \dots, g^{(n)}(0) = h^{(n)}(0)$  sendo que para os nosso propósitos é suficiente verificar um caso particular e simples<sup>2</sup>.

**Obs 2.** Se  $Q(x)$  é um polinômio de grau no máximo  $n$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Q(x)}{(x-x_0)^n} = 0$  então  $Q \equiv 0$ .

**Prova.**

Pela translação  $x \mapsto x_0 + (x - x_0)$  temos  $Q(x) = a_n(x - x_0)^n + \dots + a_1(x - x_0) + a_0$  e

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots + a_1(x - x_0) + a_0}{(x - x_0)^n} = 0,$$

e como para  $x \rightarrow x_0$  o limite do numerador é  $a_0$  e o do denominador é 0, temos  $a_0 = 0$ . Eliminando na fração em (\*)  $a_0 = 0$  e um fator  $(x - x_0)$  e repetindo o argumento temos  $a_1 = 0$  e assim, sucessivamente todos os coeficientes de  $Q$  são nulos e portanto  $Q \equiv 0$  ■

Com tal observação estabelecemos a unicidade do polinômio de Taylor a qual é importante pois nos possibilita reconhecê-lo em meio a computações.

**Corolário 2 (A Unicidade do Polinômio de Taylor).** Com as hipóteses do Teorema 1, se  $Q = Q(x)$  é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$  satisfazendo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

então  $Q$  é o polinômio de Taylor de ordem  $n$  em  $x_0$ .

**Prova.** Trivial pois pelo Corolário 1, se  $P(x) = P_n(x)$  é o polinômio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em  $x_0$  então  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ . Assim, devido às hipóteses,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{P(x) - f(x)}{(x - x_0)^n} + \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} \right] = 0$$

e assim, pela Observação 2,  $P - Q \equiv 0$  ■

---

<sup>2</sup>Para o caso geral vide Lima, Elon L. - Curso de Análise, Vol 1, pp 221-222, Rio de Janeiro, IMPA, 1976.

**Exemplo 1.** As fórmulas de Taylor com resto integral das funções  $e^x$ ,  $\cos x$  e  $\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , com seus respectivos polinômios de Taylor  $P_n$ ,  $P_{2n+1}$  e  $P_{2n+2}$  e restos no ponto  $x_0 = 0$  são,

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n dt = P_n(x) + R_n(x)$$

$$(b) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \int_0^x \frac{\cos^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!} (x-t)^{2n+1} dt = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$$

$$(c) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \int_0^x \frac{\sin^{(2n+3)}(t)}{(2n+2)!} (x-t)^{2n+2} dt = P_{2n+2}(x) + R_{2n+2}(x).$$

**Verificação.** Basta utilizar o Teorema 1 (Taylor) e observar que sequência ordenada dos números

$$(a) \quad \exp^{(m)}(0), \text{ onde } m = 0, 1, 2, \dots, \text{ é } (1, 1, 1, 1, \dots).$$

$$(b) \quad \cos^{(m)}(0), \text{ onde } m = 0, 1, 2, \dots, \text{ é } (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots).$$

$$(c) \quad \sin^{(m)}(0), \text{ onde } m = 0, 1, 2, \dots, \text{ é } (0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots) \blacksquare$$

As fórmulas acima foram fáceis de calcular por terem sido triviais o cômputo das derivadas na origem. No exemplo a seguir, para  $f(x) = \arctan x$ , tal cômputo direto é árduo mas contornável. Note que o resto obtido, dado por uma integral, não tem a forma do resto na fórmula de Taylor com resto integral. Ainda assim, estes restos são iguais como funções.

**Exemplo 2.** Para  $\arctan x$ , em  $x_0 = 0$ , valem as seguintes fórmulas com resto integral

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x).$$

**Verificação.**

Utilizando a fórmula para a soma finita dos termos de uma PG finita,

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{ se } r \neq 1,$$

temos

$$\arctan' t = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo, integrando e notando que  $\arctan 0 = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$\arctan x = \int_0^x \arctan' t dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Então, pelo Corolário 2, o polinômio surgido é o de Taylor de ordem  $2n+1$  de  $\arctan x$  em 0 pois, para  $x$  tendendo a zero obtemos

$$\frac{1}{|x|^{2n+1}} \left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \frac{1}{|x|^{2n+1}} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{x^2}{2n+3} \rightarrow 0.$$

Por fim,  $(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt = \arctan x - P_{2n+1}(x) = R_{2n+1}(x)$  ■

No Exemplo 2 a expressão para o resto é bem mais simples que a dada pela fórmula de Taylor com resto integral. Ainda mais, na primeira  $x$  é apenas um extremo de integração enquanto que na segunda  $x$  surge como extremo de integração e também no integrando.

Outra importante função é a logarítmica e ao invés de  $\log x$  é mais prático considerar a função  $\log(1+x)$  cujo cômputo das derivadas não é difícil pois  $\log^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!}{x^k}$ . Porém, como a forma integral do resto para  $\log(1+x)$  é difícil de estimar procedemos como no caso da função  $\arctan x$  e relacionamos  $\frac{d}{dx}\{\log(1+x)\}$  com a soma de uma PG.

**Exemplo 3.** Para  $\log(1+x)$ ,  $x > -1$ , em  $x_0 = 0$  valem as fórmulas com resto integral

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt = P_n(x) + R_n(x).$$

**Verificação.**

Utilizando, como no Exemplo 2, a fórmula  $1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ , se  $r \neq 1$ , temos, supondo  $t > -1$ ,

$$\log'(1+t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t},$$

e então integrando,

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt.$$

Pelo Corol. 2 o polinômio surgido é o de Taylor de ordem  $n$  pois analisando

$$\frac{1}{|x|^n} \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right|$$

vemos que para  $x > 0$  temos  $0 \leq t \leq x$  e  $1+t \geq 1$  e

$$0 \leq \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{x^n} \int_0^x t^n dt = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0 ;$$

e para o caso  $-1 < x < 0$  temos  $-1 < x \leq t \leq 0$  e  $0 < 1+x \leq 1+t$  e portanto,

$$\left| \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{|x|^n} \frac{1}{1+x} \int_x^0 |t|^n dt = \frac{|x|}{(n+1)(1+x)} \rightarrow 0 \text{ quando } x \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

**Exemplo 4.** Para  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  e  $x > -1$ , as fórmulas de Taylor com resto integral em  $x_0 = 0$  são

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x); \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

$$\text{com } \binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1, \text{ e } \binom{\alpha}{0} = 1.$$

**Verificação.**

Basta notar que  $f(x) = (1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)} \in C^\infty(-1, +\infty)$  e aplicar o Teorema de Taylor observando as fórmulas para as derivadas de  $f$ ,

$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m} \text{ e } f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1) = \binom{\alpha}{m} m! \blacksquare$$

Uma questão fundamental que surge no caso  $f \in C^\infty(c, d)$  é saber se a aproximação é tanto melhor quanto maior a ordem do polinômio de Taylor. Isto é, desejamos saber se dado  $x_0 \in (c, d)$  e  $P_n(x)$ , o polinômio de Taylor de  $f$  em  $x_0$ , temos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x_0) = f(x_0)$ . Analisaremos tal questão após apresentarmos a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

A seguir vemos a Fórmula de Taylor com resto infinitesimal, que não requer  $f \in C^\infty$ .



## A Fórmula de Taylor com Resto Infinitesimal

Esta é a mais simples das fórmulas de Taylor, já que não supõe a existência de  $f^{(n+1)}$ . Nesta seção mostramos que se  $f$  é  $n$ -vezes derivável em  $x_0$  então podemos aproximar os valores de  $f(x)$ , com  $x$  próximo de  $x_0$ , pelos valores de um polinômio  $P_n(x)$  de grau menor ou igual a  $n$ ,

$$f(x) = P_n(x) + R(x), \quad \text{com } R(x) = R(x_0; x),$$

tal que o resto (ou erro) nesta aproximação,  $R(x) = f(x) - P_n(x)$ , satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Tal limite pode ser interpretado como “o resto  $R(x)$  tende a zero mais rapidamente que  $(x - x_0)^n$  tende a zero, quando  $x$  tende a  $x_0$ ” ou ainda, utilizando a translação  $h \mapsto x = x_0 + h$ , definindo  $r(h) = R(x_0 + h)$  e  $p_n(h) = P_n(x_0 + h)$  e escrevendo

$$f(x_0 + h) = p_n(h) + r(h), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0,$$

“o resto  $r(h)$  é um infinitésimo de ordem superior a  $n$  em relação a  $h$ ”. Este fato permite estimar o erro e deduzir propriedades de  $f$  através de uma tal aproximação.

Abaixo, por instrutivos e úteis, destacamos os casos  $f$  1-derivável e  $f$  2-derivável. Logo após, a unificação dos argumentos e a generalização para  $f$   $n$ -derivável é curta, mas “densa”.

**Proposição 1.** Sejam  $\delta > 0$  e  $f : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,

(a) Se  $f$  é derivável em  $a$  e  $|h| < \delta$  temos,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

(b) Se  $f$  é duas vezes derivável em  $a$  e  $|h| < \delta$  temos,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r(h), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0.$$

**Prova.**

(a) Pela definição de  $f'(a)$  segue que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] = f'(a) - f'(a) = 0 .$$

(b) Como existe  $f''(a)$  então  $f'$  é definida numa vizinhança do ponto  $a$  e portanto  $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{f''(a)}{2!}h^2$  é derivável numa vizinhança da origem. Ainda, por ser derivável  $f$  é contínua e  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$ . Assim, pela Regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r'(h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f'(a+h) - f'(a) - f''(a)h}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} - f''(a) \right] = 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Graças à Prop. 1 temos, devido às hipóteses, as interpretações abaixo para as aproximações de  $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , localmente em  $x_0$ .

**Aproximação Linear.** Supondo  $f$  derivável em  $x_0$  e

$$T : T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, f(x_0))$  temos (v. Figura 1)

$$f(x) = T(x) + E(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0 .$$

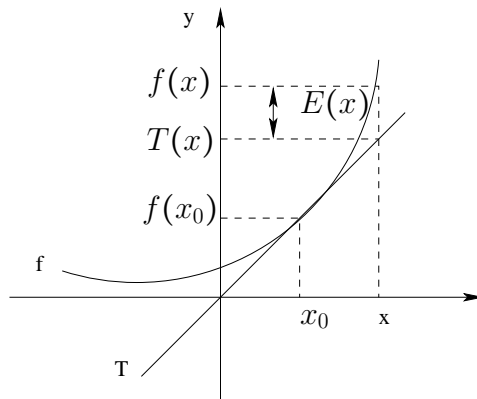


Figura 1: Aproximação Linear

**Aproximação por um polinômio de grau 2.** Se  $f$  é 2-vezes derivável em  $x_0$  temos,

$$f(x) = P_2(x) + E(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^2} = 0 .$$

$$P_2 : P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 .$$

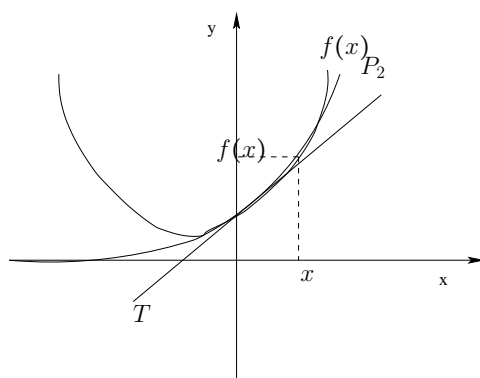


Figura 2: Aproximação por um polinômio de grau 2.

Pela Proposição 1 e o Teorema 1, de Taylor, é fácil intuir o que segue.

**Teorema 2.** Sejam  $\delta > 0$  e  $f : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -vezes derivável em  $a$  e  $|h| < \delta$ . Então,

$$(2.1) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0 .$$

ou, equivalentemente,

$$(2.2) \quad f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n E(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0 .$$

**Prova.**

A equivalência entre as expressões (2.1) e (2.2) é trivial. Provemos (2.1). Como existe  $f^{(n)}(a)$ , segue que  $f$  é  $(n-1)$ -vezes derivável numa vizinhança de  $a$  e portanto  $r(h) = f(a+h) - p(h)$  é  $(n-1)$ -vezes derivável numa vizinhança da origem. Claramente  $p(h)$  é tal que  $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ , se  $0 \leq k \leq n$ , e as derivadas de tais ordens de  $r(h) = f(a+h) - p(h)$  se anulam

na origem. Assim, como as derivadas até ordem  $n - 1$  de  $h^n$  se anulam na origem, aplicando a regra de L'Hospital  $(n - 1)$ -vezes obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r^{(n-1)}(h)}{n(n-1)\dots 2 \cdot h} = \frac{1}{n!} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r^{(n-1)}(h) - r^{(n-1)}(0)}{h - 0} = \frac{1}{n!} r^{(n)}(0) = 0 \blacksquare$$

Com tal fórmula é simples aperfeiçoar e generalizar o Teste da Derivada Segunda que estabelece: dada  $f \in C^2(c, d)$  e  $a \in (c, d)$  com  $f'(a) = 0$  temos,

- (i) se  $f''(a) > 0$  então  $a$  é ponto de mínimo local de  $f$ ,
- (ii) se  $f''(a) < 0$  então  $a$  é ponto de máximo local de  $f$ .

Notando que tal teste nada afirma se  $f'(a) = f''(a) = 0$ , provemos o resultado abaixo.

**Proposição 2.** Seja  $f \in C^{n-1}(c, d)$ ,  $n \geq 2$ , e  $a \in (c, d)$  tal que existe  $f^{(n)}(a)$  e

$$f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0.$$

- (a) Supondo  $n$  par temos,
  - (i) Se  $f^{(n)}(a) > 0$  então  $a$  é ponto de mínimo local estrito de  $f$ .
  - (ii) Se  $f^{(n)}(a) < 0$  então  $a$  é ponto de máximo local estrito de  $f$ .
- (b) Se  $n$  é ímpar então  $a$  não é ponto nem de mínimo local nem de máximo local, de  $f$ .

**Prova.**

Pelas hipóteses e pelo Teorema 2 temos,

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + E(h)h^n, \quad \lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0.$$

Logo, supondo  $|h|$  suficientemente pequeno e  $h \neq 0$ ,

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + E(h).$$

Notemos que como  $E(h) \rightarrow 0$  se  $h \rightarrow 0$  e  $f^{(n)}(a) \neq 0$ , para  $0 \neq |h|$  suficientemente pequeno os sinais de  $f^{(n)}(a)$  e  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h^n}$  são iguais e, no caso  $n$  par, é igual ao de  $f(a + h) - f(a)$ .

Conseqüentemente, para  $h$  suficientemente pequeno e  $h \neq 0$  temos,

- (a) (i)  $n$  par e  $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) - f(a) > 0$  e  $a$  é ponto de mínimo local estrito.  
(ii)  $n$  par e  $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f(a+h) - f(a) < 0$  e  $a$  é ponto de máximo local estrito.  
(b) Se  $n$  é ímpar, a expressão  $f(a+h) - f(a)$  muda de sinal segundo  $h$  muda de sinal ■

### Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange<sup>3</sup>

Esta fórmula é uma generalização do Teorema do Valor Médio (TVM).

**Teorema 3.** Seja  $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existem  $f^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ ,  $n$  um natural fixo. Então, dados  $x_0, x \in (c, d)$ ,  $x_0$  fixo, existe  $\xi = \xi(x)$  entre  $x_0$  e  $x$ , com  $\xi \neq x_0$  e  $\xi \neq x$ , tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} .$$

**Prova.**

Pelo Teorema do Valor Médio existe  $\xi_1$  entre  $x$  e  $x_0$ , com  $\xi_1 \neq x_0$  e  $\xi_1 \neq x$ , tal que  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi_1)$  e

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi_1)(x-x_0).$$

Seja  $\eta \in \mathbb{R}$  determinado pela equação (\*)  $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \eta(x-x_0)^2$ . Então, trocando  $x_0$  por  $t$  definimos (a troca  $x$  por  $t$  requereria aplicar o TVM 2-vezes, verifique),

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \eta(x-t)^2 \text{ satisfaz } \varphi(x_0) = 0 = \varphi(x) .$$

Logo, existe  $\xi_2$  entre  $x_0$  e  $x$ ,  $\xi_2 \neq x_0$  e  $\xi_2 \neq x$ , tal que  $\varphi'(\xi_2) = 0$ . Porém,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) + 2\eta(x-t) = [2\eta - f''(t)](x-t).$$

---

<sup>3</sup>J. L. Lagrange (1797), matemático francês.

Avaliando tal identidade em  $\xi_2$  temos  $2\eta - f''(\xi_2) = 0$ ,  $\eta = \frac{f''(\xi_2)}{2!}$  e, por (\*),

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x - x_0)^2 .$$

De forma análoga, determinando  $\lambda$  pela equação

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \lambda(x - x_0)^{n+1} ,$$

e trocando<sup>4</sup>  $x_0$  por  $t$  definimos a função derivável  $\psi(t)$ , com  $t$  entre  $x_0$  e  $x$ ,

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - \lambda(x - t)^{n+1} ;$$

$$\psi(x_0) = 0 = \psi(x),$$

cuja derivada é a soma abaixo, em que cada segundo termo entre colchetes cancela com o primeiro termo entre os dois colchetes imediatamente anteriores,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \left[ -f'(t) \right] + \left[ -f''(t)(x - t) + f'(t) \right] + \left[ -\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x - t)^2 + f''(t)(x - t) \right] + \dots \\ &+ \left[ -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \right] + \lambda(n+1)(x - t)^n = \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \lambda(n+1)(x - t)^n . \end{aligned}$$

Uma vez mais, existe  $\xi$  entre  $x_0$  e  $x$ ,  $\xi \neq x_0$  e  $\xi \neq x$ , tal que  $\psi'(\xi) = 0$  e

$$\lambda(n+1)(x - \xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n \implies \lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \blacksquare$$

A expressão  $R(x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$  é a forma de Lagrange do resto.

## Comentários

- (1) O cuidado para que  $\xi$  esteja entre  $x_0$  e  $x$ ,  $\xi \neq x_0$  e  $\xi \neq x$  pode ser em uma primeira abordagem negligenciado porém, é em determinadas estudos importante.
- (2) Em geral utilizamos a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, por prática. Seu inconveniente provém de desconhecermos o ponto “ $\xi$ ”. A forma integral do resto é “melhor” pois mais precisa e define uma função  $x \rightarrow \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - x_0)^n dt$  contínua se  $f^{(n+1)}$  é integrável e cuja classe de diferenciabilidade é  $C^{p+1}$  se  $f^{(n+1)} \in C^p$ .

---

<sup>4</sup>A troca  $x \mapsto t$  conduz a uma segunda prova, mais longa, ao aplicarmos indutivamente o TVM  $n$ -vezes.

A fórmula de Taylor com resto de Lagrange é facilmente deduzível de sua correlata com resto integral, supondo  $f^{(n+1)}$  contínua. Para tal é útil o simples e belo resultado abaixo.

**Segundo Teorema do Valor Medio para Integrais**<sup>5</sup>. Consideremos duas funções  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $f$  é contínua e  $g \geq 0$  é integrável e  $\int_a^b g(t)dt > 0$ . Então, existe ao menos um ponto  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$(*) \quad \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} = f(\xi) .$$

**Prova.**

Sejam  $m = f(x_1)$  e  $M = f(x_2)$  o mínimo e máximo de  $f$ , respectivamente. Então,  $\forall x \in [a, b]$  temos  $m \leq f(x) \leq M$  e ainda,  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ . Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \in [m, M] .$$

**Caso 1.** Se  $m < \gamma < M$ , pelo TVI existe  $\xi$  entre  $x_1$  e  $x_2$  tal que  $f(\xi) = \gamma$ .

**Caso 2.** Se  $\gamma = M$  então  $\int_a^b [M - f(x)]g(x) dx = 0$  e portanto, como  $[M - f(x)]g(x) \geq 0$ , temos  $[M - f(x)]g(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ . Assim, como  $g$  não se anula em algum intervalo aberto  $J$ , segue que  $f$  é então constante e igual a  $M$  em  $J$  e assim, todo  $\xi$  em  $J$  satisfaz (\*).

**Caso 3.** ( $\gamma = m$ ) Basta aplicar o Caso 2 ao par de funções  $-f$  e  $g$  ■

**Corolário.** Aplicando o Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais à forma integral do resto na fórmula de Taylor de uma função  $f$ , supondo  $f^{(n+1)}$  contínua, obtemos, já que a função  $[x_0, x] \ni t \mapsto (x - t)^n$  é positiva e com integral  $> 0$  (o caso  $x < x_0$  é análogo),

$$\int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} ,$$

estabelecendo o que afirmamos acima ■

---

<sup>5</sup>Interpretação: uma função contínua assume a sua média ponderada por  $g \geq 0$  se  $\int g dt > 0$ . Ainda, aceitando  $\xi \in [a, b]$  tal prova é trivializável e até mesmo a dedução da fórmula de Taylor com resto de Lagrange a partir daquela com resto integral é “simples”: basta observar que  $\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$  e a desigualdade  $m \int_{x_0}^x (x-t)^n dt \leq \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \leq M \int_{x_0}^x (x-t)^n dt$ ,  $m$  o mínimo e  $M$  o máximo de  $f^{(n+1)}$ , e usar o TVI.

Com a Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange obtemos uma versão da Proposição 2.

**Proposição 3.** Seja  $f \in C^n(c, d)$ ,  $n \geq 2$ , e  $a \in (c, d)$  tal que

$$f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(a) \neq 0 .$$

- (a) Suponhamos que  $n$  é par e  $J$  é o maior sub-intervalo de  $(c, d)$  com  $a \in J$  e  $f^{(n)}$  sem se anular em  $J$ . Seja  $f|_J$ , a restrição de  $f$  a  $J$ .
- (i) Se  $f^{(n)}(a) > 0$  então  $a$  é ponto de mínimo estrito de  $f|_J$ .
- (ii) Se  $f^{(n)}(a) < 0$  então  $a$  é ponto de máximo estrito de  $f|_J$ .
- (b) Se  $n$  é ímpar então  $a$  não é ponto nem de mínimo local nem de máximo local, de  $f$ .

**Prova.**

Dado  $x \in (c, d)$ , pelo Teorema 3 existe  $\xi = \xi(x)$  entre  $a$  e  $x$  tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n = \\ &= f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

Para  $J$  como no ítem (a) e  $x \in J \setminus \{a\}$  temos  $\xi \in J$ ,  $f^{(n)}(a)$  e  $f^{(n)}(\xi)$  tem mesmo sinal e

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n ;$$

consequentemente, por tal equação,

- (a) temos  $(x-a)^n > 0$ , pois  $n$  é par, e
- (i)  $f^{(n)}(a) > 0 \implies f^{(n)}(\xi) > 0$  e  $f(x) > f(a)$
- (ii)  $f^{(n)}(a) < 0 \implies f^{(n)}(\xi) < 0$  e  $f(x) < f(a)$ .
- (b) para  $x \in J$ , o sinal da expressão  $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}$  é constante mas o do denominador  $(x-a)^n$  não ( $n$  é ímpar) e assim o do numerador  $f(x) - f(a)$  também não ■



### Fórmula de Taylor com Resto de Cauchy.

Esta fórmula é um aperfeiçoamento da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange e é utilizada em vários textos (mas não neste), particularmente para a análise da Fórmula Binomial, vide Exemplo 9 no que segue, e assim a apresentamos aqui e convidamos o leitor a aplicá-la no citado exemplo e em outros de sua escolha.

**Teorema 4.** Seja  $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que existem  $f^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ ,  $n$  um natural fixo. Então, dados  $x_0, x \in (c, d)$ ,  $x_0$  fixo, existe  $\xi = \xi(x)$  entre  $x_0$  e  $x$ , com  $\xi \neq x_0$  e  $\xi \neq x$ , tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

**Prova.**

Consideremos para  $t$  entre  $x_0$  e  $x$  a função  $\Psi$  [vide a definição de  $\psi = \psi(t)$  no Teorema 3]

$$\Psi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Pela argumentado no Teorema 3 [vide o cômputo de  $\psi'$  no Teorema 3] a derivada de  $\Psi$  é,

$$\Psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

e pelo TVM aplicado a  $\Psi$  existe  $\xi$  entre  $x$  e  $x_0$ ,  $\xi \neq x$  e  $\xi \neq x_0$ , tal que

$$\frac{\Psi(x) - \Psi(x_0)}{x - x_0} = \Psi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

Mas, evidentemente,

$$\Psi(x) = 0 \text{ e } \Psi(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

e finalmente,

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \blacksquare$$

**Comentário.** Admitindo  $f^{(n+1)}$  contínua, a Fórmula de Taylor com Resto de Cauchy é consequência imediata da Fórmula de Taylor com Resto Integral pois sob tal hipótese o Teorema do Valor Médio para Integrais assegura a existência de  $\xi$  entre  $x_0$  e  $x$ ,  $\xi \neq x_0$  e  $\xi \neq x$ , tal que

$$\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n .$$

### Aplicações

**Exemplo 5.** As fórmulas de Taylor, resto de Lagrange, de  $e^x$ ,  $\cos x$  e  $\sin x$  em  $x_0 = 0$  são,

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} , \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x , \quad \xi \neq 0 \text{ e } \xi \neq x .$$

Em particular,

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right] .$$

$$(b) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{\cos^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1} , \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x , \quad \xi \neq 0 \text{ e } \xi \neq x .$$

$$(c) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} , \quad \xi \text{ entre } 0 \text{ e } x , \quad \xi \neq 0 \text{ e } \xi \neq x .$$

**Verificação:** Segue imediatamente do Exemplo 1 e do Teorema 3 ■

**Exemplo 6.** Dadas as funções  $e^x$ ,  $\cos x$  e  $\sin x$  e um número real arbitrário  $x$  temos,

$$(a) \quad e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right] .$$

$$(b) \quad \cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right] .$$

$$(c) \quad \sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right] .$$

### Verificação.

Se  $P_n(x)$ ,  $P_{2n}(x)$  e  $P_{2n+1}(x)$  são os polinômios de Taylor de ordem  $n$ ,  $2n$  e  $2n+1$ , em  $x = 0$ , de  $e^x$ ,  $\cos x$  e  $\sin x$  e, se  $R_n(x)$ ,  $R_{2n}(x)$  e  $R_{2n+1}(x)$  são seus respectivos restos de Lagrange, vide Exemplo 5, mostremos que tais restos tendem a zero se  $n$  tende a  $+\infty$ .

Observemos antes que: fixado  $m \in \mathbb{N}$ , para  $n > m$  temos

$$\frac{m^n}{n!} = \frac{m^m}{m!} \frac{m}{m+1} \frac{m}{m+2} \cdots \frac{m}{n} \leq \frac{m^m}{m!} \frac{m}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- (a) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $|x| < m < n$  temos,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq e^m \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- (b) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $|x| < m < n$  temos,

$$|R_{2n}(x)| = \left| \frac{\cos^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leq \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- (c) Neste caso, com a notação do Exemplo 5, para  $m, n \in \mathbb{N}$  tais que  $|x| < m < n$  temos,

$$|R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{m^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \blacksquare$$

**Exemplo 7.** Para  $-1 \leq x \leq 1$  é válida a expressão,

$$\arctan x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right].$$

Em particular,

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right].$$

### Verificação.

Pelo Exemplo 2, basta provarmos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt = 0$  se  $|x| \leq 1$ . Para tal  $x$  é claro que

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \blacksquare$$

**Exemplo 8.** Para  $-1 < x \leq 1$  é válida a expressão,

$$\log(1+x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right].$$

Em particular,

$$\log 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right].$$

**Verificação.**

Pelo Exemplo 3, basta mostrarmos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt = 0$  se  $x \in (-1, 1]$ .

Se  $x \in [0, 1]$  é fácil ver que

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Se  $-1 < x < 0$ , para  $-1 < x \leq t \leq 0$  temos  $0 < 1+x \leq 1+t \leq 1$ ,  $0 \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+x}$  e assim,

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \left| \int_x^0 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{1+x} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{(1+x)(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \blacksquare$$

A seguir analisamos a função binomial  $(1+x)^\alpha$ ,  $\alpha$  não natural e  $x > -1$ , para a qual a fórmula de Taylor com resto integral é mais apropriada que a com resto de Lagrange.

**Exemplo 9.** Seja  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  com  $\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , e  $\binom{\alpha}{0} = 1$ .

$$(a) \quad (1+x)^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n \right], \quad \forall x \in (-1, 1).$$

$$(b) \quad 2^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{2} + \dots + \binom{\alpha}{n} \right], \quad \text{se } \alpha > 0.$$

**Verificação.**

Seja  $f(x) = (1+x)^\alpha$ , com  $x > -1$ .

(a) Pelo Exemplo 4 basta mostrarmos:  $R_n(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , se  $|x| < 1$ .

Computando  $f^{(n+1)}$  e reescrevendo o resto obtemos,

$$\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1+t)^{\alpha-n-1} = \alpha \binom{\alpha-1}{n} (1+t)^{\alpha-n-1},$$

$$(9.1) \quad R_n(x) = \alpha \binom{\alpha-1}{n} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt.$$

Analisemos então o resto, iniciando com os coeficientes binomiais.

**Afirmção**<sup>6</sup>:  $\binom{\alpha-1}{n} x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , se  $|x| < 1$  e  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Primeiro notemos que, é fácil ver,

$$A(n) := \left| \binom{\alpha-1}{n} \right| = \left| \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right|$$

e fixemos  $r$  tal que  $|x| < r < 1$ . Então,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) x \right| = |x|$  e existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{j} \right| |x| < r < 1, \quad \forall j > p, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Supondo  $n > p$  concluímos a afirmação:

$$\left| \binom{\alpha-1}{n} x^n \right| = A(p) |x|^p \left| \left(1 - \frac{\alpha}{p+1}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| |x|^{n-p} \leq A(p) |x|^p r^{n-p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

A seguir, analisamos o resto  $R_n(x)$  dividindo nos casos  $x$  positivo e  $x$  negativo.

**Caso**  $0 < x < 1$ : temos  $0 \leq t \leq x < 1$  e, para  $n > \alpha - 1$ :  $0 \leq (1+t)^{\alpha-n-1} (x-t)^n \leq x^n$  e

$$|R_n(x)| \leq \alpha \binom{\alpha-1}{n} \int_0^x x^n dt = \alpha \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Caso**  $x < 0$ : reescrevemos o integrando como  $\left| \frac{(x-t)^n}{(1+t)^n} (1+t)^{\alpha-1} \right|$ . Sendo  $-1 < x \leq t \leq 0$ , temos  $0 < 1+x \leq 1+t \leq 1$  e  $0 \leq \frac{t}{x} \leq 1$  e  $(1+t)^{\alpha-1} \leq B = B(x) = \max(1, (1+x)^{\alpha-1})$  e

$$\frac{|x-t|}{|1+t|} \leq |x| \quad [\text{pois } 0 \leq t-x \leq -tx-x = -x(1+t) = |x||1+t|].$$

Logo,  $\left| \frac{(x-t)^n}{(1+t)^n} (1+t)^{\alpha-1} \right| \leq B(x) |x|^n$  e, como acima,  $|R_n(x)| \leq B \left| \alpha \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

- (b) **Caso**  $x = 1$  e  $\alpha > 0$ : estimemos (9.1) mais precisamente. A sequência  $A(n)$  é limitada pois se  $p$  é o primeiro natural tal que  $0 < \alpha < p+1$ , e portanto  $0 < 1 - \frac{\alpha}{p+1} < 1$ , temos

$$A(n) \leq \left| \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right) \right| = C(\alpha) \quad \text{e}$$

$$|R_n(1)| \leq \alpha C(\alpha) \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{\alpha C(\alpha)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \blacksquare$$

<sup>6</sup>Este resultado é facilmente obtido com a teoria de Séries.

Tal expressão é útil para desenvolvermos outras funções e exemplificamos a seguir.

**Exemplo 10.** Para  $|x| < 1$  são válidas as expressões,

$$(a) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} x^n \right].$$

$$(b) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} x^{2n} \right].$$

**Verificação.**

São ambos consequências do Exemplo 9.

$$(a) \quad (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \binom{-\frac{1}{2}}{0} + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n \right],$$

com  $\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$  e, para  $n \geq 1$ ,  $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \dots (-\frac{2n-1}{2})}{n} = (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n}.$

(b) Segue imediatamente de (a), trocando  $x$  por  $-x^2$  ■

**Exemplo 11.** Para  $|x| < 1$  é válida a expressão,

$$\arcsin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right],$$

com a expressão entre colchetes sendo o polinômio  $P_{2n+1}$  de Taylor de  $\arcsin x$  na origem.

**Verificação.**

Pelos Exemplos 9 [vide (9.1)] e 10(b) e suas notações obtemos para  $|y| < 1$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1.3}{2.4}y^4 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} y^{2n} + R_n(y^2), \quad |R_n(y^2)| \leq \left| \frac{1}{2} \binom{-\frac{3}{2}}{n} \right| y^{2n+2},$$

e integrando (podemos pois o resto integral é uma função contínua pelo TFC),

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x R_n(y^2) dy.$$

Então, pela Afirmação vista no Exemplo 9 temos

$$\left| \int_0^x R_n(y^2) dy \right| \leq \frac{1}{2} \left| \binom{-\frac{3}{2}}{n} \right| \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ se } |x| < 1,$$

estabelecendo a 1ª afirmação no enunciado. Quanto à 2ª afirmação, basta notar que

$$\left| \frac{\arcsin x - P_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}} \right| = \left| \frac{1}{x^{2n+1}} \int_0^x R_n(y^2) dy \right| \leq \frac{1}{2} \left| \binom{-\frac{3}{2}}{n} \right| \frac{x^2}{2n+3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \blacksquare$$

**Exemplo 12. (Teorema)** O número  $e$  é irracional.

**Prova.**

Se  $s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então  $s_n < e$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = e$  e para  $p \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+p)!} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \left( \frac{1}{n+1} \right)^k \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!}. \end{aligned}$$

Portanto,  $0 < e - s_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (s_{n+p} - s_n) \leq \frac{1}{nn!}$ .

Desta forma, supondo  $e$  racional, escrevendo  $e = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , temos  $0 < q!(e - s_q) < \frac{1}{q}$ , com os números  $q!e$  e  $q!s_q = q!(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!})$  inteiros. Logo,  $q!(e - s_q)$  é um inteiro entre 0 e 1  $\nexists$

**Comentários.**

(1) No Exemplo 6(a) vimos que se  $x \in [0, 1]$  então,

$$\left| e^x - \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right] \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!},$$

que não é uma estimativa para  $e$  tão precisa quanto a obtida no Exemplo 12, visto que  $\frac{1}{nn!} < \frac{3}{(n+1)!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Mas, a ordem de grandeza é a mesma já que  $\frac{1}{10} \frac{3}{(n+1)!} \leq \frac{1}{nn!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$ .

Ainda mais, verificando que  $0 < e - s_7 < 10^{-4}$  e que

$$s_7 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2 + \frac{3620}{5040} = 2 + \frac{181}{252} = 2,7182\dots$$

obtemos as primeiras três casas decimais de  $e = 2,718\dots$

(2) Vimos que  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $\arctan x$ ,  $(1+x)^\alpha$ , etc. tem expansões em intervalos abertos centrados em  $x=0$  e fazendo uso de translações tais como

$$e^x = e^{x_0} e^{x-x_0}, \quad \sin x = \sin[(x-x_0)+x_0] = \sin(x-x_0) \cos x_0 + \cos(x-x_0) \sin x_0, \quad \text{etc.}$$

não é difícil ver que admitem expansões ao redor de outros pontos  $x_0$  em seus domínios. Funções com tais propriedades são ditas **analíticas** e são muito importantes e tem sob certos aspectos comportamento semelhante a polinômios. Mas, nem todas as funções infinitamente deriváveis são analíticas como bem mostra o exemplo que a seguir.

**Exemplo 13.** A função  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$  satisfaz  $f^{(n)}(0) = 0, \forall n$ .

**Verificação.** Deixamos ao leitor completar a prova abaixo (v. Figura 3).

As  $n$ -derivadas de  $f$  satisfazem  $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P(\frac{1}{x})$ ,  $\forall x \neq 0$ ,  $P$  um polinômio. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f^{(n)}(x) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} e^{-y^2} P(y) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{P(y)}{e^{y^2}} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \blacksquare$$

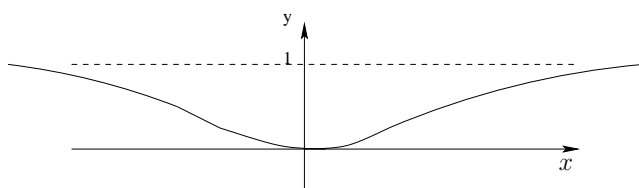


Figura 3: Gráfico de  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ , se  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ .



Entre as mais elementares aplicações da Fórmula de Taylor destacamos o cômputo das primeiras casas decimais de um número.

**Exemplo 14.** Computemos um valor aproximado para  $\sqrt[3]{8,2}$  utilizando um polinômio de Taylor de ordem 2 e avaliemos o erro.

**Verificação.** O polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  em torno de  $x = 8$  é

$$P(x) = f(8) + f'(8)(x - 8) + \frac{f''(8)}{2!}(x - 8)^2 .$$

Logo, como  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  e  $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$  segue que

$$P(x) = 2 + \frac{1}{12}(x - 8) - \frac{1}{144}(x - 8)^2 ,$$

e portanto,

$$P(8,2) = 2 + \frac{2 \cdot 10^{-1}}{12} - \frac{4 \cdot 10^{-2}}{144} = 2 + \frac{1}{60} - \frac{1}{3600} = 2 + \frac{59}{3600} \approx 2,0163888 .$$

**Avaliação do erro.** Pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos,

$$f(8,2) - P(8,2) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(0,2)^3 , \text{ com } \xi \text{ entre } 8 \text{ e } 8,2 .$$

Porém  $f'''(x) = \frac{10}{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$  e para  $\xi$  entre 8 e 8,2 temos  $\xi^8 \geq 8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$  e  $\sqrt[3]{\xi^8} \geq 2^8$  e

$$0 < \frac{f'''(\xi)}{3!} \leq \frac{1}{3!} \frac{10}{27} \frac{1}{2^8} 2^3 \cdot 10^{-3} = \frac{10^{-2}}{64 \cdot 81} \leq 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 10^{-5} .$$

Assim,  $\sqrt[3]{8,2} \approx 2,0163888$  com erro inferior a  $10^{-5}$  é uma **aproximação por falta** para  $\sqrt[3]{8,2}$  [isto é,  $2,0163888 \leq \sqrt[3]{8,2}$ ] com precisão até a 4 casa decimal ■

## EXERCÍCIOS

- Determine as primeiras 5 casas decimais de  $\pi$ .
- Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  em volta de  $x_0$ .
  - $f(x) = \ln(1+x)$  e  $x_0 = 0$
  - $f(x) = e^x$  e  $x_0 = 0$
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$  e  $x_0 = 1$
  - $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  e  $x_0 = 0$
  - $f(x) = \sqrt{x}$  e  $x_0 = 4$
- Determine o polinômio de Taylor de ordem 3 de  $f$  em volta de  $x_0 = 0$ .
  - $f(x) = \tan x$
  - $f(x) = e^{\sin x}$
- Determine o polinômio de Taylor de ordem 4 de  $f(x) = x^5 + x^3 + x$  em  $x_0 = 1$ .
- Escreva cada um dos seguintes polinômios em  $x$  como polinômios em  $(x-3)$ .
  - $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$
  - $x^5$
- Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro
  - $\ln 1,3$
  - $e^{0,03}$
  - $\sqrt{3,9}$
  - $\cos 0,2$ .
- Mostre que, para todo  $x$ ,
  - $|\sin x - x| \leq \frac{1}{3!}|x|^3$
  - $|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2!})| \leq \frac{1}{3!}|x|^3$ .

8. Mostre que, para  $0 \leq x \leq 1$

$$0 \leq e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^3}{2}.$$

9. Utilizando a relação  $\sin x = x + o(x^2)$ , calcule

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \qquad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x^2}{x^2}.$$

10. Verifique que

$$(a) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(b) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$(c) \quad \sin x = x + o(x^2)$$

$$(d) \quad \ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$$

$$11. \text{ Seja } f(x) = \begin{cases} x^8 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  em volta de  $x - 0 = 0$ .

(b) Seja  $a > 0$  um número real dado. Mostre que não existe  $M > 0$  tal que para todo  $x \in [0, a]$ ,  $|f'''(x)| \leq M$ .

12. Seja  $f$  derivável até a 2ª ordem no intervalo  $I$  e seja  $x_0 \in I$ . Mostre que existe uma função  $\varphi(x)$  definida em  $I$  tal que, para todo  $x \in I$ ,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \varphi(x)(x - x_0)^2, \text{ com } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0.$$

13. Generalize o Exercício 8 para uma função  $f$  derivável até ordem  $n$ .

14. Seja  $f$  derivável até a 2ª ordem no intervalo fechado  $[a, b]$  e seja  $x_0 \in [a, b]$ . Mostre que existe  $M > 0$  tal que para todo  $x \in [a, b]$ ,

$$|f(x) - P(x)| \leq M|x - x_0|^2,$$

com  $P(x)$  o polinômio de Taylor de ordem 2:  $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ .

Sugestão: mostre que a função  $\varphi(x)$  do Exercício 8, com  $\varphi(x_0) = 0$ , é contínua em  $x_0 = 0$ .

15. Generalize o Exercício 10 para uma função  $f$  derivável até ordem  $n$ .

16. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de  $x_0$  dado.

(a)  $f(x) = \cos x$  e  $x_0 = 0$

(b)  $f(x) = \ln x$  e  $x_0 = 1$

(c)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  e  $x_0 = 1$

(d)  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x_0 = 0$ .

17. Seja  $f(x) = \sin x$ .

(a) Se  $n$  é um natural ímpar e  $x \in \mathbb{R}$  então,

$$\left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} .$$

(b) Avalie  $\sin 1$  com erro, em módulo, inferior a  $10^{-5}$ .

(c) Avalie, com erro em módulo inferior a  $10^{-3}$ ,

$$\int_0^1 \sin x^2 dx .$$

## BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, Tom M. *Análisis Matemático*, Editorial Rverté, 1960.
2. Boulos, Paulo. *Exercícios Resolvidos e Propostos de Sequências e Séries de Números e de Funções*, E. Edgard Blücher, 1986.
3. Bressoud, D. *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, 2007.
4. Gouvêa, Fernando Q. *Séries Infinitas*, Apostila, Escola Politécnica da USP e Instituto de Matemática da USP, 1983.
5. Guidorizzi, H. L. *Um Curso de Cálculo*, vol 1, 5 ed., LTC Editora, 2001.
6. Hairer, E. and Wanner, G. *Analysis by Its History*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer 2000.
7. Jahnke, H. N. (editor), *A History of Analysis*, History of Mathematics, Vol 24, AMS, 2003.
8. Lima, Elon L. *Curso de Análise*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
9. Shilov, G. E. *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Publications, INC, 1996.
10. Spivak, M. *Calculus*, Editorial Reverté, 1978.