

**CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS:
CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO,
CONCAVIDADES E PONTOS DE INFLEXÃO,
ASSÍNTOTAS E
CONDIÇÕES PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS**

Definições: Seja $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ e A um subconjunto do domínio de f .

- f é estritamente crescente em A se $\forall s, t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$.
- f é estritamente decrescente em A se $\forall s, t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) > f(t)$.
- f é crescente em A se $\forall s, t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$.
- f é decrescente em A se $\forall s, t \in A$ temos $s < t \Rightarrow f(s) \geq f(t)$.

Observação: Na definição acima, se $A = \text{Dom}(f)$ dizemos apenas que f é, respectivamente, ou estritamente crescente ou estritamente decrescente ou crescente ou decrescente.

Teorema 1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e, derivável em (a, b) .

- (i) Se $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, então f é estritamente crescente.
- (ii) Se $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, então f é estritamente decrescente.

Prova.

- (i) Dados $s, t \in [a, b]$, com $s > t$, pelo TVM existe $c \in (t, s)$ tal que

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(c) > 0 \implies f(s) - f(t) > 0 \implies f(s) > f(t).$$

- (ii) Basta aplicar o item (i) à função $-f$ ■

Dada f derivável em p , a **reta tangente** em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é:

$$T : y - f(p) = f'(p)(x - p) \quad \text{ou} \quad T : y = f(p) + f'(p)(x - p) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Abusando a notação, a tangente T em $(p, f(p))$ é o gráfico da função afim T ,

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observação: Mudando a notação, $P_1(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ é um polinômio de grau 1 (um) na variável real x , denominado **polinômio de Taylor de ordem 1 de f no ponto p** .

Definição. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tem **concavidade para cima** no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x),$$

qualquer que seja a reta tangente T em $(p, f(p))$, com $p \in I$, e $x \in I$, $x \neq p$.

Definição. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tem **concavidade para baixo** no intervalo aberto I se

$$f(x) < T(x),$$

qualquer que seja a reta tangente T em $(p, f(p))$, com $p \in I$, e $x \in I$, $x \neq p$.

Definição. Dada $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em p , p é **ponto de inflexão** de f se existir um intervalo $(a, b) \subset \text{Dom}(f)$ tal que f tem concavidades de nomes contrários em (a, p) e em (p, b) .

Definição. Seja p um ponto de inflexão de $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Se $f'(p) = 0$, então p é **ponto de inflexão horizontal** de f .
- Se $f'(p) \neq 0$, então p é **ponto de inflexão oblíquo** de f .

Teorema 2. Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável.

- (i) Se $f''(x) > 0$ em (a, b) então f tem a concavidade para cima em (a, b) .
- (ii) Se $f''(x) < 0$ em (a, b) então f tem a concavidade para baixo em (a, b) .

Prova.

- (i) Seja $p \in (a, b)$ e consideremos $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$, $x \in (a, b)$ e a diferença,

$$\varphi(x) = f(x) - T(x), x \in (a, b) .$$

Como $\varphi'' = f'' > 0$ então φ' é crescente, sendo que $\varphi'(p) = f'(p) - f'(p) = 0$.

Desta forma temos, $\varphi'(x) > 0$ se $x > p$ e $\varphi'(x) < 0$ se $x < p$ e portanto,

φ é estrita/e crescente em $[p, b)$ e estrita/e decrescente em $(a, p]$ e $\varphi(p) = 0$.

Consequentemente,

$$x > p \implies \varphi(x) > \varphi(p) = 0 \quad \text{e} \quad x < p \implies \varphi(x) > \varphi(p) = 0 .$$

Logo, se $x \neq p$ temos $\varphi(x) = f(x) - T(x) > 0$ e assim, $f(x) > T(x)$.

- (ii) Basta trocar f por $-f$ e aplicar o item (i) ■

Uma interpretação para o Teorema 2.

Suponhamos que a variável é temporal. Se $f'' > 0$ sobre (a, b) , as retas tangentes à curva descrita por uma partícula que se move ao longo do gráfico de f são tais que suas inclinações (coeficientes angulares) aumentam com o transcorrer do tempo. Logo, a concavidade é voltada para cima. A interpretação é análoga se $f'' < 0$ ■

Definição. $C^2((a, b)) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } f, f' \text{ e } f'' \text{ são contínuas}\}.$

Proposição 1 (Uma condição necessária a um ponto de inflexão).

Se $f \in C^2((a, b))$ e p é ponto de inflexão de f então $f''(p) = 0$.

Prova.

Se $f''(p) \neq 0$ devido à continuidade de f'' existe um subintervalo (c, d) contido em (a, b) e contendo p tal que $f''(x) > 0$ para $x \in (c, d)$ e portanto p não é ponto de inflexão ζ

Exemplo 1. A função $f(x) = x^3$ tem em $p = 0$ um ponto de inflexão horizontal (verifique).

Exemplo 2. A derivada segunda em um ponto p nula, $f''(p) = 0$, não garante que o ponto seja de inflexão, como mostra o caso da função $f \equiv 1$ e das funções $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, em $p = 0$.

Exemplo 3. A hipótese f'' contínua é necessária na Proposição 1, como mostra a função,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Pois, verifique, $p = 0$ é ponto de inflexão de f mas não existe $f''(0)$ (sendo $f'(0) = 0$) ■

Definição. Seja $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. A reta $y = mx + n$ é uma **assíntota** para f se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Se $m = 0$ temos uma **assíntota horizontal** e se $m \neq 0$ temos uma **assíntota oblíqua**.

Observação. Valem definições análogas para $x \rightarrow -\infty$.

Observações. Se f é uma função racional,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p \text{ e } q \text{ polinômios, } m \text{ o grau de } p \text{ e } n \text{ o grau de } q,$$

consideremos a diferença $m - n$, o grau de p menos o grau de q . Temos,

- Se $m - n \leq 1$ então f admite assíntota.
- Se $m - n = 0$ ou $m - n = 1$, basta dividir os polinômios para determinar a assíntota.
- Se $m - n < 0$ (grau de q maior que grau de p), $y = 0$ (o eixo Ox) é uma assíntota.

Condição necessária para a existência da assíntota: Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n] = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx - n}{x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Assim, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \notin \mathbb{R}$ f não tem assíntota para $x \rightarrow +\infty$.

Método para determinar a existência de uma assíntota a f para $x \rightarrow +\infty$:

Verificada a condição de existência acima computamos o limite,

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx].$$

Se tal limite é um número real, vemos facilmente que $y = mx + n$ é uma tal assíntota de f .

Definições. Sejam $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $A \subset \text{Dom}(f)$ e $p \in A$.

- $f(p)$ é o valor máximo de f em A , ou p é um ponto de máximo de f em A se

$$f(p) \geq f(x), \quad \forall x \in A.$$

- $f(p)$ é o valor mínimo de f em A , ou p é um ponto de mínimo de f em A se

$$f(p) \leq f(x), \quad \forall x \in A.$$

- $f(p)$ é o valor máximo global de f , ou p é um ponto de máximo global de f , se para todo $x \in \text{Dom}(f)$ temos $f(p) \geq f(x)$.

- $f(p)$ é o valor mínimo global de f , ou p é um ponto de mínimo global de f , se para todo $x \in \text{Dom}(f)$ temos $f(p) \leq f(x)$.

- p é ponto de máximo local de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(p) \geq f(x), \quad \forall x \in (p-r, p+r) \cap \text{Dom}(f) .$$

- p é ponto de mínimo local de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(p) \leq f(x), \quad \forall x \in (p-r, p+r) \cap \text{Dom}(f) .$$

- os pontos de máximo e mínimo, globais e locais, de uma função são ditos extremantes globais e extremantes locais, respectivamente.
- se $f'(p) = 0$, p é um ponto crítico ou ponto estacionário.
- Os valores máximo e mínimo globais são também chamados máximo e mínimo absolutos e os pontos de máximo e mínimo globais são também chamados de pontos de máximo e mínimo absolutos.
- Os valores de máximo e mínimo de f em A são também ditos valores de máximo e mínimo de f relativos/restritos a A e os pontos de máximo e mínimo de f em A são também ditos pontos de máximo e mínimo de f relativos/restritos a A .

Teorema 3 (Condição Necessária para Máximos e Mínimos). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) . Se $x_0 \in (a, b)$ é ponto de máximo ou mínimo, local de f então $f'(x_0) = 0$.

Prova.

Trocando f por $-f$ se necessário, podemos supor x_0 um ponto de mínimo local. Assim, se $h \neq 0$ é suficientemente pequeno tal que $x_0 + h \in (a, b)$ temos $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$ e

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \quad \text{se } h > 0, \quad \text{e} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \text{se } h < 0 .$$

Logo, como $\exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ temos $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$ e então $f'(x_0) = 0$ ■

Teorema 4. (Condição Suficiente para Máximo e Mínimo Locais). Seja $f \in C^2((a, b))$ e $p \in (a, b)$ um ponto crítico de f . Então,

(i) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \implies p$ é um ponto de mínimo local.

(ii) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \implies p$ é um ponto de máximo local.

Prova.

(i) Devido à continuidade de f'' existe um intervalo (c, d) contendo p no qual $f'' > 0$. Então, no intervalo (c, d) , f' é crescente sendo que $f'(p) = 0$. Logo, no intervalo (c, p) temos $f' < 0$ e f estritamente decrescente em $(c, p]$ e no intervalo (p, c) temos $f' > 0$ e f estritamente crescente. Portanto, $f(p)$ é ponto de mínimo no intervalo (c, d)

(ii) Basta aplicar o item (i) à função $-f$ ■