MAT 130 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES

Licenciatura Diurno - 1 semestre de 2013

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

TEOREMA (PICARD) de EXISTÊNCIA e UNICIDADE para EDO's

Teorema. *Seja $F : Q \to \mathbb{R}$, onde Q é um quadrado no plano centrado em (a,b), com $F = F(x,y)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ contínuas. Então, localmente, existe uma só solução para*

$$(E1) \qquad \begin{cases} y'(x) & = F(x, y(x)), \\ y(a) & = b. \end{cases}$$

Prova.

Podemos supor $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ e $(a,b) = (0,0)$ (por favor, cheque). Suponhamos que as funções $|F|$ e $|\frac{\partial F}{\partial y}|$ são majoradas por $M > 1$.

Existência.

Tal problema é então equivalente a

$$(E2) \qquad y(x) = \int_0^x F(t, y(t))\, dt.$$

A idéia (útil em várias áreas) é definirmos a sequência de funções

$$(E3) \qquad \begin{cases} y_0(x) = 0 \text{ (função constante)}, \\ y_{n+1}(x) = \int_0^x F(t, y_n(t))\, dt. \end{cases}$$

Pois, se a sequência de funções $y_0, y_1, y_2, \ldots$ convergir uniformemente a uma função $y(x)$, passando (E3) ao limite para $n \to \infty$ obtemos (E2) e ... fim do problema!

Provemos tal convergência uniforme. Se $|x| \le 1/M$ e $|y_n(x)| \le 1$, então

$$|y_{n+1}(x)| \le \left| \int_0^x F(t, y_n(t))\, dt \right| \le M|x| \le 1, \quad \text{i.e., Imagem}(y_{n+1}) \subset [-1,1].$$

Isto mostra que todas as funções $y_1, y_2, y_3, \ldots$ estão bem definidas para $|x| \le 1/M$.

Fixemos r tal que $0 < r < 1/M$ e ponhamos $\lambda = rM$ (portanto, $0 < \lambda < 1$).

O conjunto $C\big([-r,r]\big)$ das funções contínuas definidas no intervalo $[-r,r]$ e a valores reais é um espaço vetorial. As funções contínuas definidas em compactos assumem máximo, e adotamos em tal espaço a "norma do sup"

$$\|y\| = \sup\Big\{|y(x)| : x \in [-r,r]\Big\}.$$

Agora, dado $x \in [-r, r]$, pelo teorema do valor médio aplicado a $\frac{\partial F}{\partial y}$ temos

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| = \left| \int_0^x \left[F(t, y_k(x)) - F(t, y_{k-1}(x)) \right] dt \right| \le |x| M \|y_k - y_{k-1}\|.$$

Logo, $\|y_{k+1} - y_k\| \le \lambda \|y_k - y_{k-1}\|$ e, por indução,

$$\|y_{k+1} - y_k\| \le \lambda^k \|y_1 - y_0\|.$$

Desta forma, supondo $m > n$, pela desigualdade triangular encontramos

$$|y_m(x) - y_n(x)| \le \|y_m - y_{m-1}\| + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\| \le (\lambda^{m-1} + \cdots + \lambda^n) \|y_1 - y_0\|.$$

Donde segue,

$$(E4) \qquad |y_m(x) - y_n(x)| \le \lambda^n \frac{\|y_1 - y_0\|}{1 - \lambda}.$$

Já que $0 < \lambda < 1$, a sequência $\big(y_n(x)\big)_{\mathbb{N}}$ é de Cauchy e converge a um real $y(x)$. Computando o limite em (E4) para $m \to \infty$ (notemos que $m > n$) encontramos

$$|y(x) - y_n(x)| \le \lambda^n \frac{\|y_1 - y_0\|}{1 - \lambda}.$$

Portanto, a sequência de funções $y_1, y_2, \ldots$ converge uniformemente a y, em $[-r, r]$. Então, resultados triviais sobre convergência uniforme garantem (E3).

Economizando teoria, usemos o TVM na diferença $F(t, y_n(t)) - F(t, y_n(t))$. Então, $F(t, y_n(t))$ converge uniformemente a $F(t, y(t))$ em $[-1/M, 1/M]$ e, integrando, $y_{n+1}(x)$ converge a $\int_0^x F(t, y(t)) dt$ em $[-1/M, 1/M]$. Donde segue (E3).

Unicidade.

Suponhamos que duas funções $y(x)$ e $z(x)$ satisfazem a edo (E2) em $[-r, r]$. Então, aplicando o TVM à função $\frac{\partial F}{\partial y}$ obtemos, para $x \in [-r, r]$,

$$|y(x) - z(x)| = \left| \int_0^x \left[F\big(t, y(t)\big) - F\big(t, z(t)\big) \right] dt \right| \le rM \|y - z\|.$$

Donde segue $\|y - z\| \le \lambda \|y - z\|$ e a igualdade entre as funções y e z ■

Mostremos que as reducões adotadas na prova acima são permitidas. Seja $G : [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$, com $\delta > 0$, contínua e $\frac{\partial G}{\partial y}$ também contínua. Consideremos o problema com valor inicial

$$(E5) \qquad \begin{cases} v'(u) = G\big(u, v(u)\big) \\ v(a) = b. \end{cases}$$

Definamos então a função

$$F(x,y) = G(a+\delta x, b+\delta y), \quad \text{com } (x,y) \in [-1,1] \times [-1,1],$$

e consideremos o problema com valor inicial

$$(E6) \qquad \begin{cases} y'(x) = F\big(x, y(x)\big) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Mostremos que

$$v = v(u) \text{ é solução de (E5) se e só se } y(x) = \frac{v(a+\delta x) - b}{\delta} \text{ é solução de (E6).}$$

- Se $v(u)$ é solução de (E5), então $y(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} y'(x) = v'(a+\delta x) &= G\big(a+\delta x, v(a+\delta x)\big) \\ &= G\big(a+\delta x, b + v(a+\delta x) - b\big) \\ &= G\big(a+\delta x, b+\delta y(x)\big) \\ &= F\big(x, y(x)\big). \end{aligned}$$

- Se $y = y(x)$ é solução de (E6), então

$$v(u) = \delta y\left(\frac{u-a}{\delta}\right) + b$$

  satisfaz $v(a) = 0 + b = b$ e

$$\begin{aligned} v'(u) = y'\left(\frac{u-a}{\delta}\right) &= F\left(\frac{u-a}{\delta}, y\Big(\frac{u-a}{\delta}\Big)\right) \\ &= G\left(a+u-a, b+\delta y\Big(\frac{u-a}{\delta}\Big)\right) \\ &= G\big(u, v(u)\big) \blacksquare \end{aligned}$$