MAT 130 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES -
$1^o$ SEMESTRE de 2013
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

## RESOLUÇÃO DE $P(\frac{d}{dt})x = R(t)e^{\gamma t}$, $R$ um polinômio real e $\gamma \in \mathbb{C}$

**Lema.** *Sejam $a_n, \ldots, a_1, a_0$ números não todos nulos e $R(t) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0$ um polinômio de grau menor ou igual a $n$. Consideremos a edo na variável $t$*

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = R(t) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0.$$

(a) *Se $a_0 \neq 0$, então existe uma solução polinomial $Q$, com grau$(Q)$ = grau$(R)$.*

(b) *Seja $k = \max\{i : a_0 = 0, \ldots, a_i = 0\}$. Então, a edo tem uma solução polinomial da forma $Q = t^{k+1}R_1$, com grau$(R_1)$ = grau$(R)$.*

**Prova.**

(a) Resolvamos o par de equações

$$(*)\ \begin{cases} Q(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \\ a_0 Q + a_1 Q' + a_2 Q'' + \cdots + a_j Q^{(j)} + \cdots + a_{n-1}Q^{(n-1)} + a_n Q^{(n)} = R, \end{cases}$$

identificando o coeficiente de $t^{n-i}$ nas parcelas $a_j Q^{(j)}$, $j \leq i$, nas demais ele é zero. Fixada tal parcela um fator deste coeficiente surge do trivial cômputo,

$$c_{n-i+j}\frac{d^j}{dt^j}\{\, t^{n-i+j}\} = c_{n-i+j}(n-i+j)(n-i+j-1)\cdots(n-i+1)t^{n-i},$$

e o coeficiente é então $a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!}$.

O coeficiente de $t^{n-i}$ no sistema (*) satisfaz, a soma em ordem decrescente em $j = i, i-1, \ldots, 0$,

$$(i)\ \ a_i c_m \frac{n!}{(n-i)!} + \cdots + a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} + \cdots + a_0 c_{n-i} = b_{n-i}\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Pelas expressões $(i)$ acima obtemos a equação matricial trivialmente resolúvel,

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_1 n & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \frac{n!}{(n-2)!} & a_1 \frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_i \frac{n!}{(n-i)!} & a_{i-1} \frac{(n-1)!}{(n-i)!} & . & a_j \frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 \\ a_n n! & . & . & . & . & . & . & . & a_2 2! & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n-i} \\ . \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-i} \\ . \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

(b) Neste caso, a equação é

$$a_n x^{(n)} + \cdots + a_{k+1} x^{(k+1)} = R.$$

Pelo item (a), a equação $a_n y^{(n-k-1)} + \cdots + a_{k+1} y = R$, com $k + 1 \leq n$, têm solução $y(t) = Q(t)$, com grau$(Q)$ = grau$(R)$. Integrando $y = y(t)$ $k + 1$-vezes, e escolhendo em cada integração zero para termo independente, obtemos a solução desejada ■

**VIDE VERSO**

## A FÓRMULA PARA $P\left(\frac{d}{dt}\right)\{Q(t)e^{\gamma t}\}$:

**(Regra de Leibnitz).** *Sejam $f$ e $g$ pertencentes a $C^\infty(\mathbb{R})$. Então,*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

**Prova.**

O caso $n = 1$ é trivial: $(fg)' = f'g + fg'$. Supondo a fórmula para $n$, temos

$$(fg)^{(n+1)} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}\right] = \sum_{j=0}^{n}\left[\binom{n}{j} f^{(j+1)} g^{(n-j)} + \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n+1-j)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + fg^{(n+1)}$$

$$= \binom{n+1}{0} fg^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}g$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad \blacksquare$$

Utilizaremos também uma fórmula para as derivadas de um polinômio. Dado

$$p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

é fácil ver que

$$p^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^{n} a_k \frac{k!}{(k-j)!} t^{k-j}.$$

**VIDE VERSO**

**Teorema.** *Consideremos o operador diferencial com coeficientes constantes*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_n\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2\frac{d^2}{dt^2} + a_1\frac{d}{dt} + a_0 I.$$

*Seja* $Q = Q(t)$ *uma função de classe* $C^\infty(\mathbb{R})$*. Então, vale a fórmula*

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\{\,Q(t)e^{\gamma t}\,\} = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} + \cdots + \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' + p'(\gamma)Q' + p(\gamma)Q\right]e^{\gamma t}.$$

**Prova.**

Pela regra de Leibnitz segue

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)[Q(t)e^{\gamma t}] = \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{d^k}{dt^k}\big[Q(t)e^{\gamma t}\big] = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}Q^{(j)}(t)\gamma^{k-j}\right]e^{\gamma t}.$$

Finalmente, trocando a ordem no somatório encontramos

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}Q^{(j)}\gamma^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{k=j}^{n} a_k\frac{k!}{(k-j)!}\gamma^{k-j}\right]\frac{Q^{(j)}}{j!} = \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(\gamma)\frac{Q^{(j)}}{j!}.$$

Logo,

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)[Q(t)e^{\gamma t}] = \left[\sum_{j=0}^{n}\frac{p^{(j)}(\gamma)}{j!}Q^{(j)}\right]e^{\gamma t}.$$

**Vide Verso**

**Corolário.** *Consideremos a edo homogênea*

$$a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0.$$

*Se* $\gamma$ *é uma raíz de multiplicidade* $m$ *do polinômio característico* $p(\lambda)$*, então as* $m$ *funções*

$$e^{\gamma t}, te^{\gamma t}, \ldots, t^{m-1}e^{\gamma t}$$

*são soluções da edo.*

**Prova.**

Utilizemos que $p(\gamma) = p'(\gamma) = \cdots = p^{(m-1)}(\gamma) = 0$ e que $\frac{d^k(t^j)}{dt^k} = 0$ se $k > j$.

Computando $P\Big(\frac{d}{dt}\Big)(t^j e^{\gamma t})$, com $j = 0, \ldots, m-1$, pela fórmula acima obtemos

$$P\Big(\frac{d}{dt}\Big)(t^j e^{\gamma t}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{p^k(\gamma)}{k!}\frac{d^k(t^j)}{dt^k} \;+\; \sum_{k=m}^{n} \frac{p^k(\gamma)}{k!}\frac{d^k(t^j)}{dt^k} = 0 + 0 \blacksquare$$

**Conclusão:** Dada uma edo com coeficientes constantes e de ordem $n$, determinando suas raízes características e suas respectivas multiplicidades algébricas enconramos $n$ soluções da edo homogênea.