MAT 130 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
1º semestre de 2013

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Resolva os PVI's

   (a) $y' + 3y = x + e^{-2x}, \;\; y(0) = 0.$ (b) $xy' + 2y = \text{sen}x, \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

   (c) $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos 2x, \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$ (d) $y' - 2xy = x, \;\; y(0) = 1.$

2. Seja $Q = [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$ um quadrado centrado em (a,b) e uma função $G : Q \to \mathbb{R}$, com $G = G(u,v)$. Mostre que é possível reduzir o PVI

$$(1) \qquad \begin{cases} v'(u) & = G(u, v(u)), \\ v(a) & = b. \end{cases}$$

   a um PVI da forma

$$(2) \qquad \begin{cases} y'(x) & = F(x, y(x)), \\ y(0) & = 0, \end{cases}$$

   onde $F = F(x,y)$ é uma função definida no quadrado $[-1,+1] \times [-1,+1]$. Sugestão. *Defina F e $y(x)$ em termos de G e $v(u)$, respectivamente, de tal forma que v seja uma solução de (1) se e somente se y for solução de (2).*

3. (a) Resolva o PVI: $\begin{cases} y' & = 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) & = 1. \end{cases}$

   (b) Verifique que o problema a valor inicial $\begin{cases} y' & = 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) & = 0. \end{cases}$ tem mais de uma solução. Isto contraria o Teorema de Picard?

4. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que temos

$$|f(t) - f(s)| < \epsilon \;\; \text{se} \;\; |s - t| < \delta, \quad (\text{onde } s, t \in [a,b]).$$

   Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f é uniformemente contínua.

5. Dados $a < 0 < b$, verifique que a função $y(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^3}{27}, & \text{se } x \leq a, \\ 0, & \text{se } a < x < b, \\ \frac{(x-b)^3}{27}, & \text{se } x \geq b, \end{cases}$

   é solução do PVI

$$\begin{cases} y' & = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) & = 0. \end{cases}$$

6. Seja X conjunto das funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que f é contínua. Mostre que

   (1) X é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

   (2) $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ define uma norma sobre X.

   Notação: X com a "norma do sup" acima é denotado por $C([a,b])$.

7. Mostre que a solução do PVI

$$\begin{cases} y' & = (y^2 - 1)(y^2 - 2), \\ y(0) & = 0. \end{cases}$$

   satisfaz $-1 < y(x) < 1$ para todo x no domínio. Sugestão: teorema de Picard.

8. Mostre que a mudança de variável $z = y^{1-n}$ reduz a equação

   (Equação de Bernoulli) $\qquad y' + p(x)y = q(x)y^n$

   a uma equação linear.

9. Use o problema anterior para achar a solução geral das equações de Bernoulli

   (a) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$.

   (b) $y' = ay - by^3$.

   (c) $y' = ay - f(x)y^3$, com $a > 0$ uma constante.

10. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ **converge uniformemente** à função $f : X \to \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ (grande o suficiente) tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ quaisquer que sejam } x \in X \text{ e } n \geq N.$$

    Suponha $X = [a,b]$. Mostre que se cada f_n é contínua e a sequência (f_n) converge uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então f é contínua.