

# MAT 130 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1º semestre de 2024

## 2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Resolva os PVI's

(a)  $y' + 3y = x + e^{-2x}$ ,  $y(0) = 0$ .

(b)  $xy' + 2y = \operatorname{sen}x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

(c)  $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos 2x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

(d)  $y' - 2xy = x$ ,  $y(0) = 1$ .

2. Seja  $Q = [a - \delta, a + \delta] \times [b - \delta, b + \delta]$  um quadrado centrado em  $(a, b)$  e uma função  $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $G = G(u, v)$ . Mostre que é possível reduzir o PVI

$$(1) \quad \begin{cases} v'(u) &= G(u, v(u)), \\ v(a) &= b. \end{cases}$$

a um PVI da forma

$$(2) \quad \begin{cases} y'(x) &= F(x, y(x)), \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

onde  $F = F(x, y)$  é uma função definida no quadrado  $[-1, +1] \times [-1, +1]$ .

*Sugestão.* Defina  $F$  e  $y(x)$  em termos de  $G$  e  $v(u)$ , respectivamente, de tal forma que  $v$  seja uma solução de (1) se e somente se  $y$  for solução de (2).

3. (a) Resolva o PVI

$$\begin{cases} y' &= 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

(b) Verifique que o PVI

$$\begin{cases} y' &= 2xy^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

tem mais de uma solução. Isto contraria o Teorema de Picard?

4. Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **uniformemente contínua** se para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que temos

$$|f(t) - f(s)| < \epsilon \text{ se } |s - t| < \delta, \quad (\text{onde } s, t \in [a, b]).$$

Mostre que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua então  $f$  é uniformemente contínua.

5. Dados  $a < 0 < b$ , verifique que a função

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^3}{27}, & \text{se } x \leq a, \\ 0, & \text{se } a < x < b, \\ \frac{(x-b)^3}{27}, & \text{se } x \geq b, \end{cases}$$

é solução do PVI

$$\begin{cases} y' &= y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

6. Mostre que a solução do PVI

$$\begin{cases} y' &= (y^2 - 1)(y^2 - 2), \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

satisfaz  $-1 < y(x) < 1$  para todo  $x$  do seu domínio. Sugestão: use o teorema de Picard.

7. Mostre que a mudança de variável  $z = y^{1-n}$  reduz a equação

**(Equação de Bernoulli)**  $y' + p(x)y = q(x)y^n$

a uma equação linear.

8. Use o problema anterior para achar a solução geral das equações de Bernoulli

(a)  $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ .

(b)  $y' = ay - by^3$ .

(c)  $y' = ay - f(x)y^3$ , com  $a > 0$  uma constante.

9. Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  **converge uniformemente** à função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  se, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  (grande o suficiente) tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \text{ quaisquer que sejam } x \in X \text{ e } n \geq N.$$

Suponha  $X = [a, b]$ . Mostre que se cada  $f_n$  é contínua e a sequência  $(f_n)$  converge uniformemente a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f$  é contínua.