MAT 130 - EQUAÇÕES DIFRENCIAIS E APLICAÇÕES

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1 semestre de 2013

1 LISTA DE EXERCÍCIOS

Faça os 9 primeiros exercícios, e ao menos 4 de vestibulares, procure resolver alguns dos últimos 6 exercícios.

1. Escreva na forma binômica ($z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$) os números complexos:

   (a) $(4-i)+i-(6+3i)i$ $\qquad$ (b) $\dfrac{5}{-3+4i}$ $\qquad$ (c) $\dfrac{3-i}{4+5i}$.

2. Determine e represente graficamente:

   (a) as raízes quadradas de 1. $\qquad$ (b) as raízes cúbicas de 1.

3. Seja $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(1-i) = 3+2i$. Compute $p(1+i)$.

4. Sejam a, b e c as raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. Calcule:

   (A) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ $\qquad$ (B) $a^2 + b^2 + c^2$.

5. Sabendo que $1-i$ é raíz de $z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 10z + 2 = 0$, ache todas as raízes.

6. ***(Raízes Quadradas)*** Determine (elementarmente, isto é, sem utilizar Fórmula de Moivre ou Fórmula de Euler) as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

   $$z^2 = a + ib, \qquad \text{onde } a, b \in \mathbb{R} .$$

   Dica: Determine as partes real e imaginária de z e uma fórmula para z.

7. Ache k tal que $z^3 - 5 - 4z$ divida $3z^2 - 2z^4 + z^5 - z^3 - 2z + k$.

8. Resolva a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$.

9. Resolva os sistemas lineares em z e w:

   $a)$ $\begin{cases} z + iw &= 1 \\ iz + w &= 2i - 1 \end{cases}$ $\qquad$ $b)$ $\begin{cases} iz + (1+i)w &= 1 \\ (1+i)\overline{z} - (6+i)\overline{w} &= -4 - 8i \end{cases}$.

10. (FUVEST 2006) Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente, $|z| = 2$ e $\mathrm{Im}\left(\frac{z-i}{1+i}\right) = \frac{1}{2}$.

11. (ITA 2007) Considere a equação:

$$16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}\right)^4 .$$

Sendo $x \in \mathbb{R}$, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é:

A ( ) 3 B ( ) 6 C ( ) 9 D ( ) 12 E ( ) 15 .

12. (ITA 2007) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo:

$$\frac{1}{1 + i\,\mathrm{cotan}x}, \; x \neq k\pi , \; k \in \mathbb{Z} .$$

A ( ) $|\cos x|$ B ( ) $\dfrac{1+\mathrm{sen}x}{2}$ C ( ) $\cos^2 x$ D ( ) $|\mathrm{cossec}x|$ E ( ) $|\mathrm{sen}x|$.

13. (ITA 2007) Seja $Q(z)$ um polinômio de grau 5, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo z^3+z^2+z+1 um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

A ( ) 9 B ( ) 7 C ( ) 5 D ( ) 3 E ( ) 1 .

14. (ITA 2007) Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\overline{z}}{z-2i} + \frac{2z}{\overline{z}+2i} = 3 \quad \text{e} \quad 0 < |z-2i| \leq 1 .$$

15. (ITA 2008) Sejam α e β em $\mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então, $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

A ( ) 2 B ( ) 0 C ( ) 1 D ( ) 2 E ( ) $2i$.

16. (ITA 2008) Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ também é sua raíz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

A ( ) -1 B ( ) 1 C ( ) 2 D ( ) 3 E ( ) 4 .

17. (ITA 2008) Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. que pertençam a

$$S \ = \ \{z \in \mathbb{C}: \ 1 < |z+2| < 3\} \ .$$

18. (FUVEST 2008 - questão adaptada) Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss o número

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \ .$$

Ainda mais,

(a) Determine as partes real e imaginária de $\frac{1}{\omega}$ e de ω^3 .

(b) Represente $\frac{1}{\omega}$ e ω^3 na figura já esboçada.

(c) Determine as raízes complexas da equação $z^3 - 1 = 0$.

19. (ITA 2009) Se $a = \cos\frac{\pi}{5}$ e $b = \mathrm{sen}\frac{\pi}{5}$, então, $\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A ( ) $a + bi$ $\qquad$ B ( ) $-a + bi$ $\qquad$ C ( ) $(1 - 2a^2b^2) + ab(1 + b^2)i$.

D ( ) $a - bi$ $\qquad$ E ( ) $1 - 4a^2b^2 + 2ab(1 - b^2)i$.

20. (ITA 2009) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$w = x^2(1+3i) + y^2(4-i) - x(2+6i) + y(-16+4i) \in \mathbb{C} \ .$$

Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega \ = \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \ \mathrm{Re}w \ \leq \ -13 \ \text{ e } \ \mathrm{Im}w \ \leq \ 4 \ \}.$$

21. (ITA 2010) Se z é uma solução de equação em $\mathbb{C}$,

$$z - \overline{z} + |z|^2 \ = \ -\left[(\sqrt{2} + i)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} \ - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12} ,$$

pode-se afirmar que

A ( ) $i(z - \overline{z}) < 0$ $\qquad$ B ( ) $i(z - \overline{z}) > 0$ $\qquad$ C ( ) $|z| \in [5, 6]$

D ( ) $|z| \in [6, 7]$ $\qquad$ E ( ) $\left|z + \frac{1}{\overline{z}}\right| > 8$.

22. (ITA 2010) Os argumentos principais ds soluções da equação em z,

$$iz + 3\overline{z} + (z+\overline{z})^2 - i = 0$$

pertencem a

A ( ) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ B ( ) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ C ( ) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

D ( ) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\bigcup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$ E ( ) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\bigcup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

23. (ITA 2010) Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, onde $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:

I. Quatro das raízes são imaginária puras.

II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.

III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I B ( ) II C ( ) III D ( ) I e III E ( ) II e III.

24. (ITA 2010) Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + ia_{n-1}$, para $n = 1, 2, ..., 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \in \mathbb{R}$,

II. $|p(x)| \leq 4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}), \ \forall x \in [-1, 1]$,

III. $a_8 = a_4$,

é(são) verdadeira(s) apenas

A ( ) I B ( ) II C ( ) III D ( ) I e II E ( ) II e III.

25. (ITA 2011) Dado $z = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ então, $\sum_{n=1}^{n=89} z^n$ é igual a

A ( ) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i$ B ( ) -1 C ( ) 0 D ( ) 1 E ( ) $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$.

26. (ITA 2011 - questão alterada) Das afirmações abaixo sobre os números complexos z_1 e z_2:

    I. $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$.

    II. $|\overline{z_1} z_2| = ||\overline{z_1}|.|\overline{z_2}||$.

    III. Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\text{sen}\theta)$.

    Temos que é (são) sempre verdadeira(s):

    A ( ) apenas I $\quad$ B ( ) apenas II $\quad$ C ( ) apenas III

    D ( ) apenas II e III $\quad$ E ( ) todas .

27. (ITA 2011) A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$:

$$z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$$

    é igual a

    A ( ) 2 $\quad$ B ( ) $\dfrac{i}{2}$ $\quad$ C ( ) 0 $\quad$ D ( ) $-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ E ( ) $-2i$.

28. (ITA 2011) Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e $z_1, z_2, ..., z_n$ as raízes da equação algébrica $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_j - z_k|$, onde $1 \leq j, k \leq n$, e $j \neq k$ (i.e., j e k distintos).

29. (ITA 2012) Sejam $z = n^2(\cos 45^o + i\text{sen}45^o)$ e $w = n(\cos 15^o + i\text{sen}15^o)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1 + i)n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

    A ( ) $\sqrt{3}+i$ $\quad$ B ( ) $2(\sqrt{3}+i)$ $\quad$ C ( ) $2(\sqrt{2}+i)$ $\quad$ D ( ) $2(\sqrt{2}-i)$ $\quad$ E ( ) $2(\sqrt{3}-i)$.

30. (ITA 2012) Se arg $z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é:

    A ( ) $-\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ B ( ) $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ C ( ) $\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ D ( ) $\dfrac{3\pi}{4}$ $\quad$ E ( ) $\dfrac{7\pi}{4}$.

31. (ITA 2012) Considere um polinomio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ sao duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

    A ( ) $5(5-2\sqrt{3})$ $\quad$ B ( ) $15(5-2\sqrt{3})$ $\quad$ C ( ) $30(5-2\sqrt{3})$

    D ( ) $45(5-2\sqrt{3})$ $\quad$ E ( ) $50(5-2\sqrt{3})$.

32. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$. Seja z_0 fixo em $\mathbb{C}$. Mostre que existem coeficientes $b_0, ..., b_n$ em $\mathbb{C}$ tais que

$$p(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + ... + b_n(z - z_0)^n \ , \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Sugestão: escreva $p(z) = p(z - z_0 + z_0)$.

33. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j = 0, ..., n$, com grau$(p) = n$ (i.e., $a_n \neq 0$). Seja z_0 fixo em $\mathbb{C}$. Considere a função $P(z) = p(z + z_0)$.

   (A) Mostre que P é um polinômio.

   (B) Mostre que P e p tem mesmo grau e mesmo coeficiente dominante: a_n.

   (C) Mostre que o termo independente de P é $p(z_0)$.

34. A derivada (formal) de um polinômio

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$$

é definida como o polinômio

$$p'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + ... + a_1 \ .$$

Mostre que:

   (A) α é raíz simples de p se e só se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$.

   (B) α é raíz dupla de p se e só se $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

   (C) α é raíz de multiplicidade k $(k \leq n)$ de p se e só se

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = ... = p^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad p^{(k)}(\alpha) \neq 0 \ .$$

35. (Fórmula de Taylor) Mostre que um polinômio de grau n pode ser escrito:

$$p(X) = p(\alpha) + p'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + ... + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n \ .$$