

MAT 130 - Equações Diferenciais com Aplicações

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Primeiro Semestre de 2024

LISTA 0 - Recordação

BOA SORTE !

Verifique os resultados abaixo. Mantenha esta lista e as demonstrações sob fácil acesso.

1. Binômio de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

Sugestão: Por indução. Lembrete: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $p = 0, 1, 2, \dots, n$.

2. Progressão Geométrica

$$s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 1, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

3. Uma Fatoração Polinomial

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1), \forall n \in \mathbb{N} .$$

4. Um Produto Notável

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N} .$$

5. Teorema Todo polinômio de grau ímpar e coeficientes reais têm ao menos uma raiz real.

Sugestão: Mostre que se $z \in \mathbb{C}$ é raiz então \bar{z} também é raiz.

6. Raízes de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $n \geq 1$, com coeficientes, a_i , inteiros:

(i) Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ é raiz então $\alpha | a_0$.

(ii) Se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raiz, $\text{mdc}(p, q) = 1$, então p divide a_0 e q divide a_n .

7. Resolva algumas equações de segundo grau sem a fórmula de Baskhara e então prove-a.

8. Sejam α, β em \mathbb{R} .

(a) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$ (b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

(c) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ (d) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

9. Desigualdade Triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

10. Mostre que, no **plano de Argand-Gauss**, se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 = 1$, então existe um único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que,

$$z = \cos \theta + i \sin \theta .$$

11. Se $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1$ e $z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ então,

$$z_1 z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) .$$

12. Definindo $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (**Fórmula de Euler**) temos a **Fórmula de Moivre**:

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = e^{in\theta} , \forall n \in \mathbb{N} .$$

13. Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, o **módulo** de z é $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o **conjugado** é $\bar{z} = a - ib$.

(a) Se $z \neq 0$ então existe um único $\theta \in \mathbb{R}$, módulo 2π , tal que $z = |z|e^{i\theta}$.

(b) Represente z , θ , $|z|$ e \bar{z} (simétrico a z em relação ao eixo real).

(c) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

(d) Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ e $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

(e) Se $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, então $\bar{z} = e^{-i\theta}$.

14. **Desigualdade Triangular**: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

15. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ então, $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

16. Se $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega = a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $|\omega| = 1$, então,

$$\text{existe } \omega^{-1} = \frac{1}{\omega} = \bar{\omega} = a - ib .$$

17. **Distância de Ponto a Reta** A equação geral de uma reta no plano cartesiano é: $D : ax + by + c = 0$; a ou b não nulo. Dado $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, a distância de P_0 à reta D é :

$$|\overline{PD}| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$