MAT130 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E APLICAÇÕES - IMEUSP

FORMA EXATA / CAMPO GRADIENTE - Caso Trivial no Plano

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Primeiro semestre de 2024

Seja Ω um aberto conexo em $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$. Fixemos no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ a base canônica ordenada.

Definições. Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial

$$F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)),$$

com $M : \Omega \to \mathbb{R}$ e $N : \Omega \to \mathbb{R}$ as coordenadas do vetor $F(x,y)$ em relação à base canônica do plano. O campo vetorial F é um **campo gradiente** se existe uma função escalar diferenciável (ou campo escalar diferenciável) $V : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla V = F.$$

O campo escalar V é dito um **potencial** para F.

Definições. Sejam $M : \Omega \to \mathbb{R}$ e $N : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções quaisquer. A expressão

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

indica uma **forma diferencial**. Dizemos que tal forma diferencial é **exata** se existe uma função escalar diferenciável $V : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que o diferencial dV da função V coincide com a forma $Mdx + Ndy$. Isto é,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = Mdx + Ndy$$

ou, ainda,

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = M \\ \frac{\partial V}{\partial y} = N. \end{cases}$$

Pelas definições acima temos que a forma diferencial $Mdx + Ndy$ é exata se e somente se o campo vetorial associado $F = (M,N)$ é um campo gradiente.

Dada $f = f(x,y)$, escrevemos também $f_x = \partial f/\partial x$ e $f_y = \partial f/\partial y$.

[O resultado que segue é estendível a abertos **simplesmente conexos**. Vide Guidorizzi, H. L., Cálculo Vol 3, 5ª ed., LTC, 2002.]

Teorema. *Seja R um retângulo aberto, não vazio, e com lados paralelos aos eixos coordenados de $\mathbb{R}^2$. Sejam M, N, M_y e N_x funções contínuas em R. Então,*

$$Mdx + Ndy \text{ é exata} \iff M_y = N_x.$$

Prova.

($\Rightarrow$) Neste caso, existe $F : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável com $F_x = M$ e $F_y = N$. Logo, $F_{xy} = M_y$ é contínua. O teorema de Schwarz (versão forte, vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-SchwarzTheorem.pdf`) garante que F_{yx} existe e $F_{yx} = F_{xy}$. Isto prova $N_x = M_y$.

($\Leftarrow$) Fixemos um arbitrário ponto (a, b) no retângulo R. Seja (x, y) um ponto qualquer no retângulo R. Consideremos o caminho de integração formado pelo segmento horizontal de início em (a, b) e fim em (x, b) justaposto ao segmento vertical de início em (x, b) e fim em (x, y). Vide figura abaixo.

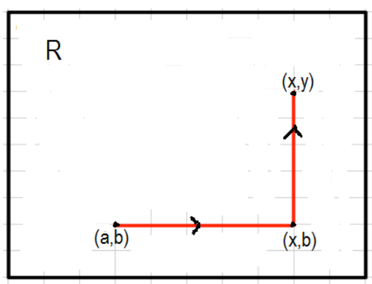

Figura 1: Ilustração ao Caminho de integração.

Definamos $F : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$F(x, y) = \int_a^x M(t, b)dt + \int_b^y N(x, s)ds.$$

Computemos F_x e F_y. Apliquemos o teorema fundamental do cálculo (TFC) e também a regra de Leibniz para a derivação sob o sinal de integração [vide `https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL.pdf`]. Pelo TFC, é claro que $F_y(x, y) = N(x, y)$. Ainda mais,

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= M(x, b) + \int_b^y N_x(x, s)ds \\ &= M(x, b) + \int_b^y M_y(x, s)ds \\ &= M(x, b) + M(x, y) - M(x, b) \\ &= M(x, y) \clubsuit \end{aligned}$$