2ª Prova de Cálculo II - MAT121 - IOUSP
3/11/2014

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________GABARITO____________________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens

1. Desenhe as curvas de nível e represente a imagem da função

$$z = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Solução.

Escrevendo $z = f(x,y)$, temos $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Seja m um número real arbitrário. Consideremos as retas concorrentes na origem

$$y = mx \quad \text{e} \quad y = -mx.$$

Para $x \neq 0$ temos

$$f(x,mx) = \frac{x^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{1}{1+m^2} = f(x,-mx).$$

Se $m = 0$, as retas indicadas acima são concidentes e coincidem com o eixo Ox. Sobre a reta $y = 0$ (o eixo Ox), excetuando a origem temos

$$f(x,0) = 1.$$

Sobre a reta $x = 0$ (o eixo Oy), excetuando a origem temos

$$f(0,y) = 0.$$

Os pares de retas concorrentes $y = \pm mx$, com $m \neq 0$ e excetuando a origem do plano, formam a curva de nível $c = 1/(1+m^2)$ de f.

Por acima, temos

$$\text{Imagem}(f) = \left\{ \frac{1}{1+m^2} : m \in \mathbb{R} \right\} \bigcup \{0\} \subset [0,1].$$

Já vimos que $\{0,1\} \subset \text{Imagem}(f)$. Vejamos que dado $r \in (0,1]$, existe m tal que

$$\frac{1}{1+m^2} = r.$$

De fato, basta que $m^2 = \frac{1}{r} - 1$. Donde segue $m = \pm\sqrt{\frac{1}{r}-1}$. Donde segue

$$\text{Imagem}(f) = [0,1] \clubsuit$$

2. Calcule, caso exista

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}.$$

Solução.

(a) Se $y = x$, com $x \neq 0$, temos

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \frac{4x^2}{2x^2} = 2.$$

Se $y = -x$, com $x \neq 0$, temos

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Logo, o não existe o limite em questão.

(b) Utilizando coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\sin\theta, \quad \text{com} \quad r > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{xy^2}{x^2-y^2} &= \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} \\ &= r\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\theta}{\cos 2\theta} \\ &= \frac{r}{2}\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \\ &= \frac{r}{2}\cos\theta\tan 2\theta.\end{aligned}$$

Notemos que

$$(x,y) \to (0,0) \quad \text{se e somente se} \quad r \to 0.$$

Analisemos então

$$\lim_{r\to 0} \frac{r}{2}\cos\theta\tan 2\theta.$$

Observemos que

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \cos\theta\tan 2\theta = +\infty,$$

Cncluímos então que

$$\text{não existe} \quad \lim_{r\to 0} \frac{r}{2}\cos\theta\tan 2\theta.$$

Logo,

$$\text{não existe} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2} \clubsuit$$

3. Dê exemplos de funções $f : I\!R^2 \to \mathbb{R}$ tais que (verifique o que afirmar):

a) f é contínua em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.

b) f admite derivadas parciais em $(0,0)$ mas não é diferenciável em $(0,0)$.

c) f tem todas as derivadas direcionais em $(0,0)$ mas não é aí diferenciável.

d) existem as derivadas direcionais $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}$, $\forall \vec{v}$ unitário, mas não vale a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \vec{v} \, .$$

Solução.

(a) A função

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(cujo gráfico é um cone)},$$

é contínua pois é a composição de duas funções contínuas: a função raíz quadrada $\sqrt{\cdot} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ e o polinômio $P(x,y) = x^2+y^2$.

Entretanto, f não tem derivadas parciais na origem pois

$$\text{não existe} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

e $f_y(0,0)$ também não. Logo, f não é diferenciável na origem pois funções diferenciáveis num ponto admitem derivadas parciais neste ponto.

(b) A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$ pois temos

$$f(t,t) = \frac{1}{2} \quad \text{se } t \neq 0 \, ,$$

e não temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, que é a condição para f ser contínua na origem.

Entretanto, f admite derivadas parciais na origem já que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

e, analogamente, $f_y(0,0) = 0$.

Como f não é contínua na origem segue que f não é diferenciável na origem [se uma função é diferenciável em um ponto p, então ela é contínua em p].

(c) e (d). Consideremos a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e uma direção $\vec{v} = (a,b)$, com $|\vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$.
Investiguemos a existência da derivada direcional

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$$

computando o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{ta(tb)^2}{t^2a^2+t^2b^2} - 0\right] = \lim_{t\to 0} ab^2 = ab^2 \ .$$

Logo, existe a derivada direcional de f na origem em todas as direções.
Entretanto f não é diferenciável pelas seguintes razões.

- Pela fórmula para as derivadas direcionais temos

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = 0.$$

- Se f é uma função arbitrária diferenciável na origem sabemos que é então válida a fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \overrightarrow{\nabla} f(0,0) \cdot \overrightarrow{v} \ .$$

Assim, se a função f acima dada fosse diferenciável na origem teríamos $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, para todo vetor unitário $\overrightarrow{v}$, o que evidentemente não ocorre para todos os versores já que a fórmula para a as derivadas direcionais é $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = ab^2$, a qual não se anula em todos os versores ♣

4. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, onde

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

uma curva diferenciável (isto é, derivável) qualquer cuja imagem está contida na superfíce de nível

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1.$$

Seja $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

(a) Prove que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(0) = 0$.

(b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada no ponto (x_0, y_0, z_0).

(c) Determine equação do plano tangente à superfície de nível

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$$

no ponto $(1, 1, 1)$.

Solução.

(a) Por hipótese, temos $f(\gamma(t)) = 0$ para todo t, com f e γ difeenciáveis. Então, pela regra da cadeia segue

$$0 = (f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \text{ para todo } t.$$

Em particular, em $t = 0$ temos $0 = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(0)$.

(b) Seja π o plano solicitado. A superfície no enunciado é a superfície de nível 1 da função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. O vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ é normal a tal superfície, no ponto (x_0, y_0, z_0). Logo,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 8y_0, 18z_0)$$

é normal ao plano π (que passa por (x_0, y_0, z_0). Assim, obtemos

$$\pi : \; 2x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0) + 18z_0(z - z_0) = 0.$$

(c) Seja τ o plano solicitado. A superfície no enunciado de (c), é a superfície de nível 14 da função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Então, analogamente ao item (b) encontramos

$$\tau : 2(x - 1) + 8(y - 1) + 18(z - 1) = 0 \clubsuit$$

5. Suponha que a função $z = z(x, y)$ satisfaz a equação

$$z(x, y) \cdot e^{x-y} + z(x, y)^3 = 2.$$

(a) Compute as derivadas parciais de $z = z(x, y)$ no ponto $(2, 2)$.

(b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z = z(x, y)$ no ponto

$$(2, 2, 1).$$

(c) Ache a equação da reta normal ao gráfico de $z = z(x, y)$ no ponto $(2, 2, 1)$.

Solução.

(a) As derivadas parciais de $z = z(x, y)$ satisfazem as equações

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)e^{x-y} + z(x, y)e^{x-y} + 3z^2(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \text{e} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)e^{x-y} - z(x, y)e^{x-y} + 3z^2(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

No ponto $(2, 2)$, as derivadas parcias de $z = z(x, y)$ satisfazem as equações

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(2, 2) + z(2, 2) + 3z^2(2, 2)\frac{\partial z}{\partial x}(2, 2) = 0 \\ \text{e} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(2, 2) - z(2, 2) + 3z^2(2, 2)\frac{\partial z}{\partial y}(2, 2) = 0. \end{cases}$$

(b) Observemos que no ponto $(x, y) = (2, 2)$ temos $z(2, 2) + z^3(2, 2) = 2$. A única solução real $r = z(2, 2)$ para tal equação é $z(2, 2) = 1$ [é fácil ver que as demais são complexas].

Portanto, temos $z(2, 2) = 1$.

Seja π o plano tangente procurado.

O vetor normal ao plano π é também o vetor normal à superfície de nível 2 da função $F(x, y, z) = z \cdot e^{x-y} + z^3$ no ponto $(2, 2, 1)$, o qual é o gradiente

$$\nabla F(2, 2, 1) = (ze^{x-y}\,, -ze^{x-y}\,, e^{x-y} + 3z^2)\Big|_{(2,2,1)} = (1\,, -1\,, 4).$$

Assim, o plano tangente desejado é

$$\pi : (x - 2) - (y - 2) + 4(z - 1) = 0.$$

(c) A reta normal solicitada é

$$N : (x, y, z) = (2, 2, 1) \ + \ t\,\langle 1, -1, 4\rangle \ , \ \ t \in \mathbb{R} \clubsuit$$