1ª Prova de Cálculo II - MAT 121- IOUSP

2º semestre de 2014

Nome : ____________________ GABARITO____________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Justifique todas as passagens.

1. Calcule

$$(a)\quad \int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx \qquad\qquad (b)\quad \int_{1}^{4}\left(e^{4x}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Solução.

(a) Com a mudança de variável $y = x + 1$ obtemos $x = y - 1$,

$$x'(y) = 1 \quad \text{e}$$

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx = \int_{0}^{1}(y-1)\sqrt{y}\,x'(y)\,dy = \int_{0}^{1}(y-1)y^{\frac{1}{2}}dy$$

$$= \int_{0}^{1}(y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}})dy = \left(\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{15}.$$

(b) Claramente,

$$\int_{1}^{4}\left(e^{4x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_{1}^{4} e^{4x}dx + \int_{1}^{4}\frac{dx}{x^2}dx = \frac{e^{4x}}{4}\Big|_{1}^{4} - \frac{1}{x}\Big|_{1}^{4} = \frac{e^{16}-e^{4}}{4} - \left(\frac{1}{4}-1\right) \clubsuit$$

2. Calcule

$$\int \frac{x+1}{x^4-4x^3+5x^2-2x}dx.$$

Solução.

Temos

$$x^4-4x^3+5x^2-2x = x(x^3-4x^2+5x-2) = x(x-1)(x^2-3x+2) = x(x-1)^2(x-2).$$

Pelo método de frações parciais temos

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-2}.$$

O método de Heaviside fornece trivialmente os coeficientes A, C e D. Temos

$$A = \frac{0+1}{(0-1)^2(0-2)} = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1+1}{1(1-2)} = -2 \quad \text{e} \quad D = \frac{2+1}{2(2-1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Encontramos então

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1/2}{x} + \frac{B}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3/2}{x-2}.$$

Avaliemos a identidade acima em $x = -1$. Obtemos

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{B}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$B = -1.$$

Encontramos então

$$\int \frac{x+1}{x^4-4x^3+5x^2-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= -\frac{\ln|x|}{2} - \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C♣$$

3. Calcule

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos \alpha t \, dt, \text{ onde } \alpha \neq 0.$$

Solução.

Utilizemos a fórmula $\int uv'dt = uv - \int u'vdt$. Temos

$$\int e^{-t} \cos(\alpha t) dt = e^{-t} \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int e^{-t} \sin(\alpha t) dt$$

$$= \frac{e^{-t} \sin(\alpha t)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left[e^{-t} \left(-\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha} \right) - \int (-e^{-t}) \left(-\frac{\cos(\alpha t)}{\alpha} \right) dt \right].$$

Logo, dado um arbitrário $r > 0$ temos

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \int_0^r e^{-t} \cos(\alpha t) dt = \left(\frac{e^{-t} \sin(\alpha t)}{\alpha} - \frac{e^{-t} \cos(\alpha t)}{\alpha^2} \right) \Big|_0^r.$$

Então,

$$\lim_{r \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \int_0^r e^{-t} \cos(\alpha t) dt = (0 - 0) - \left(0 - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Donde concluímos

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(\alpha t) dt = \frac{1}{1 + \alpha^2} \clubsuit$$

4. Calcule
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Solução.

A integral é imprópria pois o integrando não é úma função limitada em nenhuma vizinhança do ponto $x = 1$.

Temos [para $0 \leq r < 1$]

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{r\to 1^-} \int_0^r \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{r\to 1^-} -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^r \\
&= \lim_{r\to 1^-} -[(1-r^2)^{\frac{1}{2}} - (1-0^2)^{\frac{1}{2}}] \\
&= \lim_{r\to 1^-} [1-\sqrt{1-r^2}] \\
&= 1\clubsuit
\end{aligned}$$

5. Calcule o comprimento da curva $\gamma(t) = (t, \ln t)$, onde $t \in [1, e]$.

Solução.

O comprimento (lenght) de γ é

$$L(\gamma) = \int_1^e |\gamma'(t)| dt = \int_1^e \left| \left(1, \frac{1}{t}\right) \right| dt$$
$$= \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\, dt$$
$$= \int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dt.$$

Substituindo

$$t = \tan\theta, \quad \text{com} \quad \theta = \arctan t,$$

obtemos

$$t'(\theta) = \sec^2\theta.$$

Logo (utilizando a tabela para primitivas de funções trigonométricas),

$$L(\gamma) = \int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\, dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta} \sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} \frac{\sec\theta(1+\tan^2\theta)}{\tan\theta} d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} (\sec\theta\, \tan\theta) d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} \operatorname{cossec}\theta\, d\theta + \sec\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)}$$
$$= -\ln|\operatorname{cossec}\theta + \operatorname{cotg}\theta|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)} + \sec\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(e)}$$
$$= -\left[\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^2}}{e} + \frac{1}{e}\right| - \ln|\sqrt{2}+1|\right] + (\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2})\clubsuit$$