MAT 121 - Cálculo II - IOUSP - Semestre 2 de 2014

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

DÚVIDAS

L7 Questão 13(b). Determine e classifique os pontos estacionários (críticos) de

$$F(x,y,z) = x^4 + x^2y + y^2 + z^2 + xz + 1.$$

Solução.

Temos $\nabla F(x,y,z) = (4x^3 + 2xy + z, x^2 + 2y, 2z + x)$. Os pontos críticos são

$$O = (0,0,0), \quad P_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{24}}, \frac{-1}{12}, \frac{1}{\sqrt{24}}\right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{24}}, \frac{-1}{12}, \frac{-1}{\sqrt{24}}\right).$$

Os pontos P_1 e P_2 são fáceis de analisar. Vejamos a origem $O = (0,0,0)$.

$$\mathcal{H}(f)(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, como $f_{xx}(O) = 0$, o teste do hessiano não se aplica. Vejamos então o que acontece em uma pequena bola aberta centrada na origem $O = (0,0,0)$. Analisemos os valores de F sobre a curva $\gamma(x) = (x, -x^2, -x^2)$ para valores de x próximos a zero. Temos

$$\begin{aligned} F(x,-x^2,-x^2) &= x^4 + x^2(-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^2 + x(-x^2) + 1 \\ &= x^4 - x^4 + x^4 + x^4 - x^3 + 1 \\ &= 2x^4 - x^3 + 1 \\ &= x^3(2x-1) + 1. \end{aligned}$$

Se $0 < x < \frac{1}{2}$, então $x > 0$ e $2x - 1 < 0$. Donde segue $x^3(2x-1) < 0$. Logo,

$$F(x,-x^2,-x^2) = x^3(2x-1) + 1 < 1.$$

Se $x < 0$, então $x^3 < 0$ e $2x - 1 < 0$. Donde segue $x^3(2x-1) > 0$. Portanto,

$$F(x,-x^2,-x^2) = x^3(2x-1) + 1 > 1.$$

Logo, a origem $O = (0,0,0)$ é um ponto de sela♣