LISTA 9 (GABARITO) - CÁLCULO I - MAT111 - IAG - Diurno

1^o SEMESTRE de 2009

Professor Oswaldo Rio Branco

(3) Assumindo $y = y(x)$ e derivando a equação da elipse em relação a x temos,

$$\frac{d}{dx}\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\} = \frac{2x}{a^2} \ + \ \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0 \ .$$

Logo, $y'(x_o) = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}$ e $T : y - y_o = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}(x - x_o)$, donde obtemos $a^2 y_o y + b^2 x_o x = b^2 x_o + a^2 y_o = a^2 b^2$, que simplificando resulta :

$$T : \ \frac{y_o}{b^2} y + \frac{x_o}{a^2} x = 1 \quad \blacksquare$$

(4) Pela mudança de variáveis: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v)$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v)$, encontramos a equação $\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$ que é uma equação em forma padrão de uma hipérbole. Notemos que se P satisfaz a a equação $|PF_1| = \sqrt{2}|PD_1|$, onde $|PF_1|$ é a distância de $P = (x, y)$ a $F_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $|PD_1|$ é a distância de P à reta $D_1 : y = -x - \sqrt{2}$ então P satisfaz a equação $xy = 1$. F_1 é denominado foco e D_1 reta diretriz.
Analogamente, temos que $|PF_2| = \sqrt{2}|PD_2|$, para o foco $F_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e a reta diretriz $D_2 : y = -x + \sqrt{2}$. A diferença das distâncias de P aos focos é uma constante: $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2\sqrt{2}$. Temos ainda os seguintes elementos da hipérbole: $V_1 = (-1, -1)$ e $V_2 = (1, 1)$ são os vértices, $\sqrt{2}$ é a excentricidade e as assíntotas são as retas $x = 0$ e $y = 0$.

Denotando $y = y(x) = \frac{1}{x}$ e derivando a equação da hipérbole em relação a x temos,

$$\frac{d}{dx}\{xy\} = y(x) \ + \ xy'(x) = \frac{1}{x} \ + \ xy'(x) = 0 \ .$$

Logo, $y'(x_o) = -\frac{1}{x_o^2}$ e $T : y - \frac{1}{x_o} = -\frac{1}{x_o^2}(x - x_o)$; a qual multiplicando por x_o resulta $x_o y - 1 = -\frac{1}{x_o}(x - x_o) = -y_o(x - x_o) = -y_o x + y_o x_o = -y_o x + 1$.
Isto é,

$$x_o y + y_o x = 2 \quad \blacksquare$$

(5) Como $y = f(x)$, temos que $\frac{d}{dx}\{y^3 + 2xy^2 + x\} = \frac{d}{dx}\{4\} = 0$ e então,

$$3y^2(x)y'(x) + 2y^2(x) + 4xy(x)y'(x) + 1 = 0 \ .$$

Da equação dada temos : $y^3(1) + 2y^2(1) + 1 = 4$. Notando que $y = 1$ é raíz do polinômio $p(y) = y^3 + 2y^2 - 3$ e dividindo este por $y - 1$ obtemos
$p(y) = (y - 1)(y^2 + 3y + 3) = (y - 1)[(y + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}]$ e assim, 1 é a única raíz de p. Consequentemente temos $y(1) = 1$ e

$$3y'(1) + 2 + 4y'(1) \ + 1 = \ 0 \ .$$

Logo, $y'(1) = -\frac{3}{7}$ e a equação da reta pedida é $T : y - 1 = -\frac{3}{7}(x - 1) \quad \blacksquare$

(6) Supondo $y = y(x)$ e derivando temos $0 = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y(x)^{-\frac{1}{3}}y'(x)$ ou,

$$x^{-\frac{1}{3}} + y(x)^{-\frac{1}{3}}y'(x) = 0 \ ,$$

portanto, no ponto (x_o, y_o) temos

$$y_o = (1 - x_o^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \qquad y'(x_o) = -\frac{x_o^{-\frac{1}{3}}}{y_o^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{\sqrt{1 - x_o^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x_o}} \ .$$

A reta tangente no ponto $P_o = (x_o, y_o)$ é dada por

$$T \ : \ y - (1 - x_o^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{1 - x_o^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x_o}}(x - x_o) \ ,$$

cujas intersecções com os eixos são

$$A = (0, (1 - x_o^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}) \quad , \quad B = (\sqrt[3]{x_o}, 0) \ .$$

Finalmente, a distância de A a B é $|AB| = \sqrt{(1 - x_o^{\frac{2}{3}}) + x_o^{\frac{2}{3}}} \ = \ 1$ ■

(7) Temos $y(t) = 3x^2(t) - 2x(t)$ e assim, derivando esta equação em relação a t, $y'(t) = 6x(t)x'(t) - 2x'(t)$. Se $y'(t_o) = 3x'(t_o)$ então $3x'(t_o) = 6x(t_o)x'(t_o) - 2x'(t_o)$ e portanto, dividindo por $x'(t_o)$, temos $3 = 6x(t_o) - 2$, o que implica $x(t_o) = \frac{5}{6}$ ■

(8) Seja Oxy o sistema de coordenadas cartesianas com Oy correspondendo à parede de sustentação da escada, a origem O ao pé da parede, Oy apontado para cima e Ox paralelo ao chão, apontado na direção do movimento da escada. Seja $x(t)$ a distância do pé da escada à parede e $y(t)$ a altura da escada. Supondo $x(0) = 0$ e $y(0) = 8$ temos então que,
$(*) \quad x^2(t) + y^2(t) = 8^2 = 64 \ ; \ x'(t) = 2, \forall t \ ; \ x(\frac{3}{2}) = 3,$
assim, de $x^2(\frac{3}{2}) + y^2(\frac{3}{2}) = 64$ concluímos que $y(\frac{3}{2}) = \sqrt{55}$ e,
derivando $(*)$, temos $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$ e portanto
$3 \times 2 + y(\frac{3}{2})y'(\frac{3}{2}) = 0$, logo,$6 + \sqrt{55}y'(\frac{3}{2}) = 0$ e, finalmente, $y'(\frac{3}{2}) = -\frac{6}{\sqrt{55}}$ ■

(9) (exercício 17, p. 203, livro texto) Pela lei dos cossenos: $(*) \quad 5^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times cos\theta = 9 + x^2 - 6xcos\theta$;
sendo x uma função de θ e este uma função do tempo t.
Temos então $x = x(\theta(t))$ e ainda, pelos dados fornecidos, $x(\frac{\pi}{2}) = 4$ e $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}, \forall t$.

Escrevendo $(*)$ como $x^2(\theta(t)) - 6x(\theta(t))cos\theta(t) = 16$ e derivando-a, com $x' = \frac{dx}{d\theta}$, obtemos,

$$2x(\theta(t))x'(\theta(t))\frac{d\theta}{dt} \ - \ 6x'(\theta(t))\frac{d\theta}{dt}cos(\theta(t)) \ + \ 6x(\theta(t))sen\theta(t)\frac{d\theta}{dt} = 0 \ .$$

Sendo t_o o instante em que $\theta(t_o) = \frac{\pi}{2}$ temos que

$$2x(\frac{\pi}{2})x'(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2} \;-\; 6x'(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}cos\frac{\pi}{2} \;+\; 6x(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}sen\frac{\pi}{2} = 0 \ ,$$

e portanto, fazendo as substituições necessárias,

$$4x'(\frac{\pi}{2}) + 12 = 0 \ .$$

Consequentemente temos $x'(\frac{\pi}{2}) = \frac{dx}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) = -3$ e portanto,

$$\frac{dx}{dt}(t_o) = \frac{dx}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2} \quad \blacksquare$$

(10) (exercício 18, p. 203, livro texto) O volume de líquido dentro do cone 'invertido' e até a altura h relativa ao vértice do cone é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Sendo r o raio da circunferência formada pela intersecção do cone com o plano paralelo ao seu topo e à distância h do vértice temos, por semelhança de triângulos,

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \ .$$

Assim, $r = \frac{2h}{3}$ e sendo a altura uma função do tempo temos $r(t) = \frac{2h(t)}{3}$ e

$$V(t) = \frac{4\pi h^3(t)}{27} \ .$$

É dado que $V'(t) = \frac{1}{10}$ e portanto, derivando a expressão encontrada para V obtemos a equação

$$\frac{4\pi \times 3h^2(t)h'(t)}{27} = \frac{1}{10} \ ,$$

e assim, no instante t_o tal que $h(t_o) = 5$ temos

$$\frac{4\pi \times 5^2 \times h'(t_o)}{9} = \frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad h'(t_o) = \frac{9}{\pi}10^{-3} \quad \blacksquare$$

(11) (exercício 19, p. 203, livro texto) Sendo P fixo, para o cômputo das velocidades pedidas (velocidade de P) podemos supô-lo, no instante inicial, na origem do sistema e o eixo Ox orientado no sentido do movimento .

Após a roda, cujo raio é 1, girar $\theta\ rad$, as coordenadas de seu centro são dadas por $(\theta, 1)$ e as coordenadas (x, y) de P por

$$\theta - x = sen\theta, \quad y = 1 - cos\theta \ .$$

Introduzindo a variável tempo temos $x(t) = \theta(t) - sen\theta(t)$ e $y(t) = 1 - cos\theta(t)$.

Derivando e utilizando que $\theta'(t) = 1$ obtemos :

$x' \ = \ \theta'(t) - cos\theta(t)\theta'(t) \ = \ 1 - cos\theta$ e $y'(t) \ = \ sen\theta(t)\theta'(t) \ = \ sen\theta \quad \blacksquare$

(12) (exercício 21, p.203, livro texto) Pela figura temos $P = (x(t), 0)$, $Q(t) = (0, y(t))$, $R(t) = (0, h)$, $|PR| = \sqrt{x(t)^2 + h^2}$ e $|QR| = |h - y(t)|$. Suponhamos $y(t) < h$. Por hipotese $|PR| + |QR| = e$ e então,

$$\sqrt{x(t)^2 + h^2} + (h - y(t)) = e \ .$$

Logo,

$$\left(\sqrt{x(t)^2 + h^2}\right)^2 = \big[y(t) + (e - h)\big]^2$$

e portanto, $x(t)^2 + h^2 = y(t)^2 + 2(e - h)y(t) + (e - h)^2$; que derivando resulta $2x(t)x'(t) = 2y(t)y'(t) + 2(e - h)y'(t)$; donde,

$$xx' = [y + (e - h)]y' = \sqrt{x^2 + h^2}y' \ .$$

A expressão pedida é $(*)$ $\ xx' = \sqrt{x^2 + h^2}y'$, onde x' e y' são as velocidades.

Extra Continuemos o exercício anterior. Sendo óbvio que y é uma função de x, determinemo-la utilizando a notação de Leibnitz. Reescrevendo $(*)$ como

$$x\frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2 + h^2}\frac{dy}{dt} \ ,$$

temos $\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Pela regra da cadeia e consequente fórmula para a derivada da função inversa sabemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Assim, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = x(x^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

A determinação de uma função $y = y(x)$ tal que $(**)$ $\quad y'(x) = x(x^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ pode ser feita diretamente pois $y(x) = (x^2 + h^2)^{\frac{1}{2}}$ é uma tal função (verifique) e a solução geral de $(**)$ é :

$$y(x) = (x^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} + C \ , C \in \mathbb{R}, \qquad .$$

Uma possível interpretação do problema é o de uma corda de comprimento e, com extremidades P e Q, passando por uma polia em R a altura h do solo, sendo a corda movida ao longo do solo (eixo x) para movimentar um objeto preso à extremidade Q.
Com tal interpretação temos as condições de existência :
(i) quando o peso está no solo, $P = (0, 0)$ temos $x = \sqrt{(e - h)^2 - h^2}$, e
(ii) quando o peso está na posição R temos $x = \sqrt{e^2 - h^2}$.
O domínio de $y = y(x)$ é dado por $\sqrt{(e - h)^2 - h^2} \leq x \leq \sqrt{e^2 - h^2}$ e portanto, para esta interpretação, devemos ter $e - h \geq h$, isto é, $e \geq 2h$.
Determinação da constante C: por (ii) devemos ter $y(\sqrt{e^2 - h^2}) = h$, logo,
$h = y(x) = ((e^2 - h^2) + h^2)^{\frac{1}{2}} + C = e + C$ $\quad$ e assim, $h = e + C$ e

$$y(x) = \sqrt{x^2 + h^2} + (h - e) \ .$$

Observe que se $x = \sqrt{(e-h)^2 - h^2}$ então $y(x) = 0$.
Abandonando a interpretação física, estendemos a solução apresentada a uma geométrica:

$$y(x) = \sqrt{x^2 + h^2} \ + \ (h - e) \ , \ \forall x \in I = \big[-\sqrt{e^2 - h^2}, +\sqrt{e^2 - h^2} \ \big] \ .$$

Determinação das funções x **e** y: devido à expressão $y = y(x)$ utilizamos $x(\theta) = htg\theta$ para $x = x(\theta)$. Substituindo esta na fórmula para y encontramos
$y(\theta) = \sqrt{h^2 tg^2(\theta) + h^2} + (h-e) = \sqrt{h^2(1 + tg^2\theta)} + (h-e) = h[|sec\theta| + (h-e)]$.
Portanto temos, notando que $\frac{d}{d\theta}\{|sec\theta|\} = |sec\theta| tg\theta$,

$$\frac{dx}{d\theta} = hsec^2\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = h|sec\theta| tg\theta \ .$$

Tais funções satisfazem a equação acima encontrada: $x\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{x^2 + h^2}\frac{dy}{d\theta}$; pois,
$x\frac{dx}{d\theta} = h^2 tg\theta sec^2\theta$ e $\sqrt{x^2 + h^2}\frac{dy}{d\theta} = (\sqrt{h^2 tg^2\theta + h^2})h|sec\theta|tg\theta = h^2 tg\theta sec^2\theta$.
Finalize explicitando o domínio comum de $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$ $\blacksquare$

(13) Para T_1 e T_2, retas tangentes aos gráficos de $y_1(x) = ax^2$ e $y_2(x) = -x^2 + 1$, respectivamente, se interceptarem ortogonalmente em $P = (p, q)$ é necessário que
(i) $q = y_1(p) = y_2(p)$, isto é, $ap^2 = -p^2 + 1$, e
(ii) $m_{T_1} m_{T_2} = -1$, onde m_{T_i} é o coeficiente angular de T_i.
Da condição (ii) temos $2ap \times (-2p) = -1$ e portanto $4ap^2 = 1$. Substituindo em (i) temos $\frac{1}{4} = -p^2 + 1$ e então : $p^2 = \frac{3}{4}$ e $a = \frac{1}{3}$ $\blacksquare$