$5^{\underline{a}}$ Lista de Cálculo I - MAT111 - IAG
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2009

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. Encontre o valor do limite e justifique:

a) $\lim\limits_{y\to 2} \;(y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$

b) $\lim\limits_{t\to 3} \dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$

c) $\lim\limits_{s\to 1} \dfrac{s^3 - 1}{s - 1}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

g) $\lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y^3 + 8}{y + 2}$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h+1} - 1}{n}$

2. Se $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$, mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \;h(x) = \dfrac{1}{6}$, mas $h(0)$ não está definida.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \neq 2 \\ 1, \text{se } x = 2 \end{cases}$

a) Determine $\lim\limits_{x\to 2} \;f(x)$ e mostre que $\lim\limits_{x\to 2} \;f(x) \neq f(2)$.

b) Esboce o gráfico de f.

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ se } x \neq -3 \\ 4, \text{se } x = -3 \end{cases}$

a) Determine $\lim\limits_{x\to -3} \;f(x)$ e mostre que $\lim\limits_{x\to -3} \;f(x) \neq f(-3)$.

b) Esboce o gráfico de f.

5. Esboce o gráfico e determine o limite indicado, se ele existir; se o limite não existir dê a razão.

a) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{se } x < 1 \\ -1, \text{ se } x = 1 \\ -3, \text{ se } 1 < x \end{cases}$

i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \;f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} \;f(x)$ iii) $\lim\limits_{x\to 1} \;f(x)$

b) $g(s) = \begin{cases} s + 3, \text{se } s \leq -2 \\ 3 - s, \text{se } \; -2 < s \end{cases}$

i) $\lim\limits_{s\to -2^+} \;g(s)$ ii) $\lim\limits_{s\to -2^-} \;g(s)$ iii) $\lim\limits_{s\to -2} \;g(s)$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } s \leq 2 \\ 8 - 2x, \text{se } 2 < x \end{cases}$

i) $\lim\limits_{x\to 2^+} \;f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} \;f(x)$ iii) $\lim\limits_{x\to 2} \;f(x)$

d) $g(t) = \begin{cases} 3+t^2, \text{se } t < -2 \\ 0, \text{se } t = -2 \\ 11-t^2, \text{se } -2 < t \end{cases}$

i) $\lim_{t\to -2^+} g(t)$ ii) $\lim_{t\to -2^-} g(t)$ iii) $\lim_{t\to -2} g(t)$

6. Dados:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3, \text{se } x \leq 1 \\ x+1, \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } x \leq 1 \\ 2, \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Mostre que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ existem mas não são iguais e portanto, $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existe.

b) Mostre que $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ existem mas não são iguais e, daí, $\lim_{x\to 1} g(x)$ não existe.

c) Determine fórmulas para $f(x).g(x)$.

d) Prove que $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$ existe, mostrando que $\lim_{x\to 1^-} f(x)g(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)g(x)$.

7. Dê o valor, caso exista, que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique.

a) $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2},\ p = 2$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x},\ p = 0$

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x},\ p = 0$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, \text{se } x \neq 3 \\ 4, \text{se } x = 3,\ p = 3 \end{cases}$

8. Calcule e justifique:

a) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ d) $\lim_{x\to \frac{-1}{3}} \dfrac{9x^2-1}{3x+1}$

e) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$ f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

9. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, \text{se } x \neq 2 \\ L, \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, \text{se } x \neq 3 \\ L, \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}, \text{se } x \neq 5 \\ L, \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $p = 5$

10. Calcule $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, e interprete geometricamente, sendo f dada por:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2 + 2$

c) $f(x) = -x^3 + 2x$

d) $f(x) = 5$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = 3x + 1$

11. Calcule:

a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2}{3x^3+x^4+x}$

c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4+3x-4}$

f) $\lim_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$

g) $\lim_{x\to p} \dfrac{x^4-p^4}{x-p}$

h) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

12. Dada $g(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x^2}{2}, \text{se } x < 2 \end{cases}$, calcule:

a) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ e $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

b) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$ e $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$

13. Dada $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, verifique que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. É f contínua em 1? Por quê?

14. Calcule:

a) $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$

15. Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ onde:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2\text{sen}\dfrac{1}{x}, \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0, \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x\text{sen}\dfrac{1}{x}, \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0, \text{se } x = 0 \end{cases}$

16. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\text{sen}x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}3x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen}x}{x-\pi}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\text{sen}x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{tgx\ \text{sen}x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg3x}{\text{sen}4x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\text{sen}x}{2x-\pi}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} x\ \text{sen}\dfrac{1}{x}$

l) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{tg(x-p)}{x^2-p^2},\ p \neq 0$

m) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\text{sen}(x^2-p^2)}{x-p}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right) - \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\text{sen}x}{x^2-\text{sen}x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-tgx}{x+tgx}$

q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\text{sen}\pi x}{x-1}$

17. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\text{sen}x-\text{sen}p}{x-p}$

b) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\cos x-\cos p}{x-p}$

c) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{tgx-tgp}{x-p}$

d) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{\sec x-\sec p}{x-p}$