Prova Substitutiva de MAT0111 - Cálculo I - IAG
26/06/09

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____
N$^{\underline{o}}$USP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco**

É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Compute as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\,x}{1-\text{sen}\,x}}$.

b) $f(x) = \dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^{3x}+2^{-3x}}$.

Resolução:

(a) Temos $f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ e então,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\,\frac{\cos x(1-\sin x)-(1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x\ .$$

(b) Temos,

$$f(x) = \frac{e^{3x\log 2}-e^{-3x\log 2}}{e^{3x\log 2}+e^{-3x\log 2}} = \frac{\frac{\sinh(3x\log 2)}{2}}{\frac{2\cosh(3x\log 2)}{2}} = \frac{\sinh(3x\log 2)}{\cosh(3x\log 2)} = \tanh(3x\log 2)\ ,$$

e portanto,

$$f'(x) = \frac{\sinh'(3x\log 2)(3\log 2)\cosh(3x\log 2)-\sinh(3x\log 2)\cosh'(3x\log 2)(3\log 2)}{\cosh^2(3x\log 2)} =$$

$$= 3\log 2\,\frac{\cosh^2(3x\log 2)-\sinh^2(3x\log 2)}{\cosh^2(3x\log 2)} = \frac{3\log 2}{\cosh^2(3x\log 2)} =$$

$$= (3\log 2)sech^2(3x\log 2) = \frac{12\log 12}{(2^{3x}+2^{-3x})^2} \quad \blacksquare$$

2. Determine o domínio e a imagem, os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos de máximo ou mínimo, locais ou globais, as assíntotas, analise as concavidades e esboce o gráfico de

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3} \ .$$

Resolução:

Temos,

(a) f **é ímpar**, $Dom(f) = \mathbb{R}^*$ e $Gr(f)$ é **simétrico em relação à origem**.

(b) $f(x) = 0$ se e só se $x = \pm 1$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^\pm} \frac{x^2-1}{x^3} = \mp\infty$ (note a “troca” de sinais) e $x = 0$ **é assíntota vertical**.

(d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x} = 0^\pm$ e $y = 0$ **é assíntota horizontal**.

(e) Por (c) e (d) concluímos que $Imagem(f) = \mathbb{R}$.

(f) $f'(x) = \frac{2x^4-(x^2-1)3x^2}{x^6} = \frac{-x^4+3x^2}{x^6} = \frac{3-x^2}{x^4}$; sinal de f' igual ao de $y(x) = 3-x^2$, uma parábola com concavidade voltada para baixo e com raízes $\pm\sqrt{3}$.

  (i) $f' < 0$ e f decrescente em $(-\infty, -\sqrt{3})$.

  (ii) $f' > 0$ e f crescente em $(-\sqrt{3}, 0)$ e em $(0, +\sqrt{3})$.

  (iii) $f' < 0$ e f decrescente em $(+\sqrt{3}, +\infty)$.

  (iv) $-\sqrt{3}$ é ponto de mínimo local e $+\sqrt{3}$ é ponto de máximo local.

  (v) $f(-\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ e $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ são, respectivamente, valores mínimo e máximo locais.

  (vi) Não existem mínimo ou máximo global.

(g) $f''(x) = \frac{-2x^5-(3-x^2)4x^3}{x^8} = \frac{2x^5-12x^3}{x^8} = \frac{2x^3-12x}{x^6}$ tem mesmo sinal que o polinômio de grau três $y(x) = 2x^3 - 12x = 2x(x^2-6) = 2x(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})$.

  (i) $f'' < 0$ e concavidade voltada para baixo em $(-\infty, -\sqrt{6})$.

  (ii) $f'' > 0$ e concavidade voltada para cima em $(-\sqrt{6}, 0)$.

  (iii) $f'' < 0$ e concavidade voltada para baixo em $(0, \sqrt{6})$.

  (iv) $f'' > 0$ e concavidade voltada para cima em $(\sqrt{6}, +\infty)$.

  (v) $\pm\Big(\sqrt{6}, \frac{5\sqrt{6}}{36})\Big)$ são **pontos de inflexão**.

(h) $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} > f(\sqrt{6}) = \frac{5\sqrt{6}}{36}$ pois f é decrescente em $(\sqrt{3}, +\infty)$.

Resumindo (no eixo positivo):

(i) Em $(0, \sqrt{3})$ cresce de $-\infty$ a $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, concavidade voltada para baixo e $f(1) = 0$.

(j) Em $(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ decresce de $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ a $\frac{5\sqrt{6}}{36}$ com a concavidade voltada para baixo.

(k) Em $\sqrt{6}, +\infty)$ decresce de $\frac{5\sqrt{6}}{36}$ a 0 com a concavidade voltada para cima ∎

3. Esboce a região limitada pelas curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $y = x^2 - 4x$ e determine sua área.

Resolução:

Temos, $f(x) = x(x^2 - 6x + 8) = x(x - 2)(x - 4)$, um polinômio de grau três com raízes 0, 2 e 4 e coeficiente dominante positivo. É trivial esboçar o gráfico de f.

Ainda, o gráfico de $g(x) = x^2 - 4x = x(x - 4)$ é o de uma parábola com concavidade voltada para cima e com raízes 0 e 4.

Pontos de intersecção entre os gráficos de f e g: analisemos $x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x$; uma solução é $x = 0$e então, dividindo por x obtemos $x^2 - 6x + 8 = x - 4$ ou, $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ com raízes $x = 3$ e $x = 4$.

No intervalo $[0, 3]$ temos $f \geq g$ e no intervalo $[3, 4]$ temos $g \geq f$.

Logo, a área procurada é:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^3 [f(x) - g(x)]\, dx \ + \ \int_3^4 [g(x) - f(x)]\, dx \\
&= \int_0^3 (x^3 - 7x^2 + 12x)\, dx \ + \ \int_3^4 (-x^3 + 7x^2 - 12x)\, dx \\
&= \left(\tfrac{x^4}{4} - \tfrac{7x^3}{3} + 6x^2\right)\Big|_0^3 \ + \ \left(-\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{7x^3}{3} - 6x^2\right)\Big|_3^4 \\
&= (\tfrac{81}{4} - 63 + 54) + \left[(-64 + \tfrac{448}{3} - 96) - (-\tfrac{81}{4} + 63 - 54)\right] \\
&= \tfrac{45}{4} \ + \ \left[(\tfrac{448}{3} - 160) + (\tfrac{81}{4} - 9)\right] \\
&= \tfrac{45}{4} \ + \ \left(-\tfrac{32}{3} + \tfrac{45}{4}\right) = \tfrac{45}{4} \ + \ \tfrac{135-128}{12} \\
&= \tfrac{45}{4} \ + \tfrac{7}{12} \\
&= \tfrac{71}{6} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

4. Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx$.

Resolução:

Como $p(x) = 2x^2+3x+2$ tem discriminante negativo $p(x)$ não tem raízes reais. É claro que $x = -2$ é raíz de $q(x) = x^3+4x^2+6x+4$; logo, $q = q(x)$ é fatorável como $x+2$ vezes um polinômio de grau dois com (é óbvio) coeficiente dominante 1 e termo independente 2; assim, é fácil ver que $x^3+4x^2+6x+4 = (x+2)(x^2+2x+2)$.

Temos então, em frações parciais,

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{2x^2+3x+2}{(x+2)[(x+1)^2+1]} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \ .$$

Multiplicando a equação acima por $(x+2)$ e então avaliando-a em $x = -2$, temos $A = \frac{4}{2} = 2$.

Então, computando a equação acima em $x = 0$ obtemos, $\frac{2}{4} = 1 + \frac{C}{2}$ e $C = -1$.

Por fim, computando a mesma equação em $x = -1$: $1 = 2 + (-B-1)$ e $B = 0$.

Portanto,

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx = \int \left[\frac{2}{x+2} - \frac{1}{1+(x+1)^2}\right] dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = 2\log|x+2| \ - \ \arctan(x+1) + c \qquad \blacksquare$$

5. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x do conjunto $\{(x,y) : y \geq 0,\ 1 \leq x \leq 2 \ \text{ e } \ x^2 - y^2 \geq 1\}$.

Resolução: Notemos que $x^2 - y^2 = 1$ é uma **hipérbole** cujo eixo de simetria é o eixo Ox e vértices $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

A condição $1 \leq x \leq 2$ mostra que estamos interessados apenas no ramo da hipérbole (uma hipérbole é constituída de dois ramos) "à direita"; isto é, o ramo pertencente aos primeiro e quarto quadrantes.

A condição $y > 0$ indica que, neste citado ramo, só nos interessa a porção acima do eixo Ox e, portanto, no **primeiro quadrante**. Da inequação $x^2 - y^2 \geq 1$ concluímos $y^2 \leq x^2 - 1$ e, como y é positivo, $y \leq \sqrt{x^2 - 1}$.

O volume procurado, V, é o gerado pela rotação em torno do eixo Ox da região abaixo do gráfico da função $y = \sqrt{x^2 - 1}$, acima do eixo Ox e com $x \in [1, 2]$:

$$V = \pi \int_1^2 \left[\sqrt{x^2 - 1}\right]^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3} \qquad \blacksquare$$

Extra: Quantos metros de um cabo de ferro são necessários para construir um arco $\widehat{AB}$, de forma parabólica, sendo A e B simétricos com relação ao eixo de simetria da parábola e com as seguintes dimensões: $2m$ a distância de A a B e $1m$ a do vértice ao segmento $\overline{AB}$?

Resolução: Adotando um sistema de coordenadas cartesiano com origem no ponto mais baixo da do arco parabólico, o eixo de simetria da parábola como o eixo Oy e o eixo Ox, naturalmente, perpendicular a Oy e passando pelo vértice da parábola e (x, y)as coordenadas, em metros, de um ponto no plano temos que a equação de tal parábola é

$$y = x^2 \ .$$

Logo, o comprimento de tal arco é

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \ .$$

Substituindo $2x = \tan\theta$ temos $2\,dx = \sec^2\theta\, d\theta$ e $4x^2 = \tan^2\theta$ e,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = 2\int_{\arctan(0)}^{\arctan 2} \sqrt{1 + \tan^2\theta}\frac{\sec^2\theta}{2}\, d\theta = \int_{0}^{\arctan 2} \sec^3\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ sec\theta \tan\theta \ + \ \log|\sec\theta + \tan\theta|\Big]\Big|_{0}^{\arctan 2}$$

Porém, $\theta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e

$$\theta = \arctan 2 \Rightarrow \tan(\theta) = 2 \Rightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 5 \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{5} \ ;$$

e assim,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5} + \log(\sqrt{5} + 2)\right] - \frac{1}{2}\left[0 + \log(1 + 0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5} + \log(\sqrt{5} + 2)\right] \quad \blacksquare$$