MAT0111 - Cálculo I - IAG
1º semestre de 2009

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Nome : ___________________GABARITO___________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco**

É necessário justificar todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$

Resolução:

(a) Escrevendo

$$\begin{aligned}(3-x^3)^4-16 &= (3-x^3)^4-2^4 = \\ &= [(3-x^3)-2]\,[(3-x^3)^3+(3-x^3)^2 2+(3-x^3)2^2+2^3] \\ &= (1-x^3)[(3-x^3)^3+2(3-x^3)^2+4(3-x^3)+8]\ .\end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \tfrac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1} &= \lim_{x\to 1} -[(3-x^3)^3+2(3-x^3)^2+4(3-x^3)+8] \\ &= -(8+8+8+8) = -32\ .\end{aligned}$$

2ª solução Pela regra de L'Hospital, como temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, analizamos o quociente das derivadas do numerador e do denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4(3-x^3)^3(-3x^2)}{3x^2} = -32\ .$$

(b) Pondo $\sqrt{x}$ em evidência obtemos,

$$\lim_{x\to +\infty} \tfrac{1+x^{-\frac{1}{6}}}{x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{\sqrt{x}}} = 0 \quad \blacksquare$$

2. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} \ , & \text{se } \ x < 2 \\ L \ , & \text{se } \ x = 2 \\ x^2 - 4x + 16 \ , & \text{se } \ x > 2 \end{cases}$.

a) Existe $L \in \mathbb{R}$ tal que f seja contínua em $x = 2$? Determine-o, se existir.

b) Existe $L \in \mathbb{R}$ tal que f seja derivável em $x = 2$? Determine-o, se existir.

Resolução: Temos,

(a) $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 2^2)$, $f(x) = x^2 + 2x + 4$, se $x < 2$ e,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 16) = 12 \ .$$

Logo, f é contínua em $x = 2$ se, e só se, $L = 12$.

(b) Para que f seja derivável em $x = 2$ é necessário que f seja contínua em $x = 2$ e portanto, $L = 12$. Resta verificarmos se para tal L, f é derivável em $x = 2$. Calculemos os limites das taxas de variação pela direita e pela esquerda:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[(2+h)^2 + 2(2+h) + 4] - 12}{h} = \lim_{h \to 0^-} 4 + h = 4 \ .$$

E, pela direita,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[(2+h)^2 - 4(2+h) + 16] - 12}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0 \ .$$

Os limites acima são diferentes e portanto f não é derivável em $x = 2$ ■

3. Calcule as derivadas de:

   a) $f(t) = \dfrac{te^{2t}}{\ln(3t+1)}$

   b) $f(t) = e^{t^3} \cos\left(\sqrt[4]{t^4 + 2t^2 + 1}\right)$

   Resolução:

$$(a) \qquad f'(t) = \frac{(e^{2t} + 2te^{2t})\ln(3t+1) - \frac{3te^{2t}}{3t+1}}{[\ln(3t+1)]^2} \quad .$$

$$(b) \qquad f'(t) = 3t^2 e^{t^3} \cos\sqrt{t^2+1} \; + \; e^{t^3} sen\sqrt{t^2+1}\,\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \qquad \blacksquare$$

4. Determine a para que as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $(x-a)^2 + y^2 = 1$ se interceptem ortogonalmente.

Resolução:

Sejam C_1 e C_2, segundo a ordem de surgimento, as circunferências acima. Se $P = (p, q)$ é um ponto de intersecção de C_1 e C_2 então

$$1 = (p-a)^2 + q^2 = p^2 - 2ap + a^2 + q^2 \quad \text{e} \quad p^2 + q^2 = 1 \ ,$$

logo, $0 = a^2 - 2ap = a(a - 2p)$ e $a = 0$ (que descartamos) ou $a = 2p$ e, neste caso, como $-1 \leq p \leq 1$, temos $-2 \leq a \leq 2$.

Se $a = \pm 2$ então $p = \pm 1$ e as retas tangentes a C_1 e C_2 em $P = (\pm 1, 0)$ são verticais e não perpendiculares.

Se $a \neq \pm 2$ então $p \neq \pm 1$ e $q \neq 0$ e para a circunferência C_1, em um pequeno intervalo aberto contendo p resolvemos $x^2 + y^2 = 1$ obtendo $y = y(x)$ e temos assim, $x^2 + y(x)^2 = 1$ que derivando acarreta

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0 \Longrightarrow 2p + 2qy'(p) = 0 \Longrightarrow y'(p) = -\frac{p}{q} \ .$$

Se T é a reta tangente a C_1 por (p, q) temos,

$$T : y - q = m_T(x - p) \ \ , m_T = -\frac{p}{q} \ .$$

Analogamente, para C_2, resolvemos $(x-a)^2 + y^2 = 1$ obtendo $y = y(x)$ para x em um intervalo aberto contendo p obtendo $(x-a)^2 + y(x)^2 = 1$ e, derivando,

$$2(x-a) + 2y(x)y'(x) = 0 \Longrightarrow 2(p-a) + 2qy'(x) = 0 \Longrightarrow y'(p) = -\frac{p-a}{q} \ .$$

Se S é a reta tangente a C_2 por (p, q) temos,

$$S : y - q = m_S(x - p) \ \ , m_S = -\frac{p-a}{q} \ .$$

É óbvio que $T \perp S \Leftrightarrow m_T . m_S = -1 \Leftrightarrow \frac{p(p-a)}{q^2} = -1 \Leftrightarrow p^2 - ap = -q^2 \Leftrightarrow p^2 + q^2 = ap \Leftrightarrow ap = 1 \Leftrightarrow a\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$ ■

5. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{4x+3x^2}{1+x^2}$. Determine os pontos de máximo e mínimo, locais e globais, os pontos de inflexão, assíntotas, os intervalos de crescimento e decrescimento e as concavidades.

Resolução: Temos,

(a) Domínio de f é $\mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x}+3}{\frac{1}{x^2}+1} = 3.$
A reta $y = 3$ é assíntota horizontal em $\pm\infty$.

(c) $f'(x) = \frac{(4+6x)(1+x^2)-2x(4x+3x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x^2+6x+4}{(1+x^2)^2} = 2\frac{-2x^2+3x+2}{(1+x^2)^2} = -4\frac{(x+\frac{1}{2})(x-2)}{(1+x^2)^2}$
$f' < 0$ em $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $f' > 0$ em $(-\frac{1}{2}, 2)$ e $f' < 0$ em $(2, +\infty)$. Logo,
$f \searrow$ em $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $f \nearrow$ em $(-\frac{1}{2}, 2)$ e $f \searrow$ em $(2, +\infty)$.
$x = -\frac{1}{2}$ é ponto de mínimo local e $x = 2$ é ponto de máximo local;
$f(-\frac{4}{3}) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) = -1$, $f(0) = 0$ e $f(2) = 4$.

(d)

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\frac{(-4x+3)(1+x^2)^2 - (-2x^2+3x+2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = 2\frac{(-4x+3)(1+x^2) + 4x(2x^2-3x-2)}{(1+x^2)^3} = \\ &= 2\frac{4x^3 - 9x^2 - 12x+3}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

O gráfico do polinômio de grau 3 $p(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$: temos,

$$p'(x) = 12x^2 - 18x - 12 = 6(2x^2 - 3x - 2) = 12(x + \frac{1}{2})(x - 2)\,,$$

p' uma parábola com a concavidade voltada para cima,

$$p' > 0 \text{ em } (-\infty, -\frac{1}{2}) \;\; ; \; p' < 0 \text{ em } (-\frac{1}{2}, 2) \;\; ; \; p' > 0 \text{ em } (2, +\infty)\;.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty \;\; ; \; p(-\frac{1}{2}) = \frac{25}{4} > 0 \;\; ; \; p(0) = 3 \;\; ; \; p(2) = -25 < 0\;.$$

Logo, p tem uma raíz c_1, $c_1 < -\frac{1}{2}$ [$c_1 \in (-\frac{4}{3}, -1)$ pois $p(-\frac{4}{3}) < 0$ e $p(-1) > 0$]; uma raíz c_2 entre 0 e 2 [$0 < c_2 < \frac{1}{2}$ pois $p(0) = 3$ e $p(\frac{1}{2}) < 0$]; e uma raíz $c_3 \in (3, 4)$ pois $p(3) < 0$ e $p(4) > 0$. Então,

$$p(x) = 4(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\;, c_1 \in (-\frac{4}{3}, -1)\;\; c_2 \in (0, \frac{1}{2})\;, c_3 \in (3, 4)$$

e c_1, c_2 e c_3 são abscissas dos pontos de inflexão de f.
Em $(-\infty, c_1)$ a concavidade de f é p/ baixo, c_1 entre $-\frac{4}{3}$ e -1, f decresce de 3 a $f(c_1) < 0$;
em $(c_1, -\frac{1}{2})$ a concavidade é p/ cima f decresce de $f(c_1)$ a $f(-\frac{1}{2}) = -1$
em $(-\frac{1}{2}, c_2)$ a concavidade é p/ cima, c_2 entre 0 e $\frac{1}{2}$, f cresce de $f(-\frac{1}{2}) = -1$ até $f(c_2) > 0$, $f(c_2) < f(\frac{1}{2}) = \frac{11}{5} < 3$;
em $(c_2, 2)$, a concavidade é para baixo, f cresce de $f(c_2) < 3$ a $f(2) = 4$
em $(2, c_3)$ a concavidade é para baixo a função decresce de 4 a $f(c_3) > 3$
em$(c_3, +\infty)$ a concavidade é para cima e f decresce de $f(3)$ a 3 ■

6. O raio r e a altura h de um cilindro circular reto estão variando de modo a manter constante o volume v. Num determinado instante $h = 3m$ e $r = 1m$ e, neste instante, a altura está variando a uma taxa de $0,2m/s$. A que taxa estará variando o raio neste instante?

Resolução:

Temos, $v(t) = cte. = \pi r^2(t)h(t)$ e, em algum instante t_0, $h(t_0) = 3$ e $r(t_0) = 1$. Derivando $v = v(t)$ obtemos,

$$0 = v'(t) = 2\pi r(t)r'(t)h(t) + \pi r^2(t)h'(t) \ ,$$

e substituindo em $t = t_0$,

$$0 = 2\pi.1.r'(t_0).3 + \pi.1^2.0,2 \Longrightarrow r'(t_0) = -\frac{0,1}{3}\, m/s \quad \blacksquare$$