ATENDIMENTO - MAT 111 - CÁLCULO I -
IAG- Diurno
1º SEMESTRE de 2009
Professor Oswaldo Rio Branco

3(d) - Lista 10 - Calcule a área de $\{(x, y) : 0 \leq y \leq x^2 - 4\}$. A região entre o eixo Ox e a parábola é infinita e, por enquanto, não faz sentido calcular a área. Para computarmos uma área falta limitarmos a região. Por exemplo, entre as retas $x = a$ e $x = b$ obtemos:

$$\int_a^b (x^2 - 4)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} - 4(b - a) \quad \blacksquare$$

3(k) Lista 11 - $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\, dx$.

Resolução:

Escrevamos $\int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx = \int x^2 . x\sqrt{1+x^2}\, dx$ e integremos por partes substituindo $u = x^2$ e $v' = x\sqrt{1+x^2}$. Assim temos, $u' = 2x$ e uma primitiva para v':

$$v = \int x\sqrt{1+x^2}\, dx = (\text{se } t = 1 + x^2) = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c\ .$$

Desta forma, escolhendo $c = 0$, pela fórmula $\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx$ temos,

$$\begin{aligned}
\int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx &= \int x^2 . x\sqrt{1+x^2}\, dx = x^2\, \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \int 2x\, \tfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\, dx \\
&= \tfrac{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \tfrac{1}{3}\int 2x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx \\
&= (\text{para} \quad t = 1 + x^2) \\
&= \tfrac{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \tfrac{1}{3}\int t^{\frac{3}{2}}\, dt \ = \ \tfrac{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + k \\
&= \tfrac{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \tfrac{2}{15}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} + k\ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{x^2+1}\, dx = \left[\frac{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{15}(1+x^2)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{3\,.\,4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{15}4^{\frac{5}{2}}\right) - \left(0 - \frac{2}{15}\right) = \frac{58}{15} \quad \blacksquare$$

8(b) - Lista 6 - Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x-7}}$

Solução

Para $p(x) = x^2 - 6x - 7 = (x+1)(x-7)$, o gráfico de p é uma parábola com concavidade voltada para cima e $p(x) > 0$ sse (abreviação de se, e somente se) $x < -1$ ou $x > 7$. Logo, o domínio de f é $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$. Ainda,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x-7}} = \lim_{x\to\pm\infty} \pm 2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-6x-7}} = \pm 2 \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2}}} = \pm 2\ ,$$

$$\lim_{x\to 7^+} \frac{2x}{\sqrt{(x+1)(x-7)}} = \lim_{x\to 7^+} \frac{2x}{\sqrt{x+1}}\frac{1}{\sqrt{x-7}} = +\infty\ .$$

Analogamente, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{2x}{\sqrt{(x+1)(x-7)}} = -\infty$.

Mostremos que em $(7,+\infty)$ f é decrescente [imprecisamente, de $+\infty$ a 2^+]. Para $x>0$,

$$f(x) = 2\sqrt{\frac{1}{1-(\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2})}}\ ,$$

sendo que $\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2}$ é decrescente a zero, para $x\to+\infty$ e assim, $-(\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2})$ cresce para zero (para $x\to+\infty$) e $1-(\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2})$ cresce para 1, se $x\to+\infty$ e $\sqrt{1-(\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2})}$ cresce para 1 e, $\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{6}{x}+\frac{7}{x^2})}}$ decresce para 1; por último, multiplicamos por 2 para obter o desejado. Logo, em $(7,+\infty)$ o gráfico de f está acima da reta $y=2$.

Em $(-\infty,-1)$, $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{6}{x}-\frac{7}{x^2}}}$ e analizamos o radicando no denominador substituindo $t=\frac{1}{x}$, $t\in(-1,0)$.

O radicando é, na variável t, $q(t) = 1-6t-7t^2$, uma parábola com a concavidade voltada para baixo cujas raízes são as inversas da parábola acima: -1 e $-\frac{1}{7}$, com vértice (um valor máximo) em $t_0=-\frac{3}{7}$. Assim, f em $(-\infty,-1)$ tem um máximo em $x_0=-\frac{7}{3}$ e o máximo é (calcule) $-\frac{\sqrt{7}}{4}\in(-1,-\frac{1}{2})$. Como q é decrescente em $(-\frac{3}{7},0)$, f é crescente em $(-\infty,-\frac{7}{3})$ [imprecisamente, de -2 a $-\frac{\sqrt{7}}{4}$].

Analogamente, q é crescente no intervalo $(-1,-\frac{3}{7})$ e f é decrescente no intervalo $(-\frac{7}{3},1)$, [imprecisamente escrevendo, de $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ a $-\infty$]

13(g) Lista 11 - $\int x^3\cos x^4\,dx$.

Resolução:

Substituindo $y=x^4$ temos $dy=4x^3dx$ e então,

$$\int x^3\cos x^4\,dx = \int \cos y\frac{dy}{4} = \frac{1}{4}\int \cos y\,dy = \frac{1}{4}\sin y + c = \frac{1}{4}\sin x^4 + c \quad \blacksquare$$

14(j) Lista 11 - $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$.

Resolução: Substituindo $y=x^2$ obtemos, $dy=2xdx$ ou $xdx=\frac{dy}{2}$. Logo,

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int_0^1 \frac{1/2dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\arctan y\Big|_0^1 = \frac{\arctan 1}{2} = \frac{\pi}{8} \quad \blacksquare$$

15(m) Lista 11 - (O enunciado na lista está errado) $\int \sin x\ \sqrt{3+\cos x}\,dx$.

Resolução: Substituindo $y=\cos x$ obtemos $dy=-\sin xdx$ eentão,

$$\int \sin x\ \sqrt{3+\cos x}\,dx = -\int \sqrt{3+y}\,dy = -\frac{2}{3}(3+y)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{3}(3+\cos x)^{\frac{3}{2}} + c \quad \blacksquare$$

19(b) Lista 11 - $\int \frac{3x+2}{1+x^2}\, dx$.

Resolução:

Temos,

$$\int \frac{3x+2}{1+x^2}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\, dx\ .$$

Porém, $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c_1$ e, pela substituição $t = 1+x^2$,

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| + c_2 = \log(1+x^2) + c_2\ .$$

Assim,

$$\int \frac{3x+2}{1+x^2}\, dx = \frac{3}{2}\log(1+x^2) + 2\arctan x \quad \blacksquare$$

19(f) Lista 11 - $\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$.

Resolução: Temos,

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}[1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2}] = \frac{1}{\frac{3}{4}[1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2]}\ .$$

Assim,

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]^2}\, dx \ =$$

(com a substituição $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$ obtemos $dy = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$ ou, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dy$)

$$= \frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{3}/2}{1+y^2}\, dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2\sqrt{3}}{3}(x+\frac{1}{2})) + c \ = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \quad \blacksquare$$

21(h) Lista 11 - $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Resolução: Basta utilizar a fórmula: $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Assim,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c \quad \blacksquare$$

21(m) Lista 11 - $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx$.

Resolução:

Fazendo a substituição $t = e^x$ temos $dt = e^x dx$ e $e^{2x} = t^2$. Assim,

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t + c = \arcsin(e^x) + c \quad \blacksquare$$

21(r) Lista 11 - $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+3e^x}}\, dx$.

Resolução:

Fazendo a substituição $t = 1+3e^x$ temos $dt = 3e^x dx$ ou, $e^x dx = \frac{dt}{3}$. Assim,

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+3e^x}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(2t^{\frac{1}{2}}\right) + c = \frac{2}{3}\sqrt{1+3e^x} + c \quad \blacksquare$$

1(i) - Lista 12- $\int (\log x)^2\, dx$.

Resolução: Fazendo a substituição $y = \log x$ temos $dy = \frac{dx}{x}$ e $e^y = x$. Logo, $dx = e^y dy$ e,

$$\int (\log x)^2\, dx = \int y^2 e^y\, dy \ ,$$

a qual integramos por partes. Se $u = y^2$ e $v' = e^y$ temos,

$$\int y^2 e^y\, dy = y^2 e^y - \int 2ye^y\, dy = y^2 e^y - 2\int ye^y\, dy,$$

e integrando novamente por partes, subestituindo $f = y$ e $g' = e^y$,

$$\int y^2 e^y\, dy = y^2 e^y - 2[ye^y - \int e^y\, dy] = y^2 - 2ye^y + 2e^y + c = (y^2 - 2y + 2)e^y + c \ .$$

Logo,

$$\int (\log x)^2\, dx = ((\log x)^2 - 2\log x + 2)x + c \qquad \blacksquare$$

1(l) Lista 12 - $\int x^3 \cos x^2 dx$.

Resolução: Pondo $y = x^2$ temos $dy = 2xdx$ e

$$\int x^3 \cos x^2 dx = \int x^2 \cos x^2\, xdx = \int y \cos y\, \frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int y \cos y\, dy \ .$$

Integrando por partes, substituindo $u = y$ e $v' = \cos y$ temos, $u' = 1$, $v = sen\, y$ e

$$\int y \cos y\, dy = y\, sen\, y - \int 1.sen\, y\, dy = y\, sen\, y + \cos y + c\, , c \in \mathbb{R}.$$

Logo, substituindo $y = x^2$,

$$\int x^3 \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\left(x^2\, sen\, x^2 + \cos x^2\right) + c\, , c \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

17(a) Lista 12 - $\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)}\, dx$.

Resolução:

Como $x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$ não têm raízes reais decompomos em frações parciais,

$$\frac{4x^2 + 17x + 13}{(x-1)(x^2+6x+10)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{(x+3)^2 + 1} \ ;$$

multiplicando tal identidade por $(x-1)$ e então avaliando em $x = 1$, temos $A = \frac{34}{17} = 2$. Em seguida, computando a identidade em $x = 0$ obtemos

$$-\frac{13}{10} = -2 + \frac{C}{10} \Longrightarrow C = 7 \ .$$

Por último, avaliando a identidade em $x = -1$, que é raíz de $4x^2 + 17x + 13$, obtemos

$$0 = -1 + \frac{-B + 7}{5} \Longrightarrow B = 2 \ .$$

Logo,

$$\frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)} = \frac{2}{x-1} + \frac{2x+7}{(x+3)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{x-1} + \frac{2(x+3)+1}{(x+3)^2+1} = \frac{2}{x-1} + \frac{2(x+3)}{(x+3)^2+1} + \frac{1}{1+(x+3)^2}$$

e assim,

$$\int \frac{4x^2+17x+13}{(x-1)(x^2+6x+10)} = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx \;+\; \int \frac{2(x+3)}{(x+3)^2+1}\,dx \;+\; \int \frac{1}{1+(x+3)^2}\,dx =$$

$$= 2\log|x-1| \;+\; \log(\,(x+3)^2+1\,) \;+\; \arctan(x+3) \;+\; c \quad \blacksquare$$

17(e) Lista 12 - $\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$.

Resolução:

Temos, $x^3+x^2+x-3 = (x-1)(x^2+2x+3) = (x-1)[(x+1)^2+2$ e assim decompomos em frações parciais como (vide resultados para frações parciais),

$$\frac{3x^2+5x+4}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}\ .$$

Efetuando o cômputo de A como em classe, multiplicamos a equação acima por $(x-1)$ e então a avaliamos em $x=1$ e assim, $A = \frac{3+5+4}{1+2+3} = 2$.

Substituindo $x=0$ obtemos $-\frac{4}{3} = -2 + \frac{C}{3}$; logo, $C=2$.

Cômputo de B: substituindo $x=-1$ obtemos, $\frac{2}{-4} = -1 + \frac{-B+2}{2}$. Logo, $B=1$.

Portanto,

$$\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx \;+\; \int \frac{x+2}{2+(x+1)^2}\,dx \;=$$

$$= 2\log|x-1| \;+\; \int \frac{x+1}{2+(x+1)^2}\,dx \;+\; \int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx\ .$$

Pela substituição $u = 2+(x+1)^2$ temos $du = 2(x+1)dx$ e $(x+1)dx = \frac{du}{2}$ e então,

$$\int \frac{x+1}{2+(x+1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\log|u| + c_1 = \frac{1}{2}\log[2+(x+1)^2] + c_1\ .$$

Por último,

$$\int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{2[1+(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2]}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2}\,dx\,,$$

e, substituindo $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ obtemos $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$ e $dx = \sqrt{2}dt$. Assim,

$$\int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan t + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c_2\ .$$

Assim, a resposta ao problema é:

$$\int \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx = 2\log|x-1| + \frac{1}{2}\log[2+(x+1)^2] + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c \quad \blacksquare$$

18(a) Lista 12 - $\int \sin 7x\, cos2x\, dx$.

Resolução:

Pelas fórmulas de prostaférese,

$$\int \sin 7x\, cos2x\, dx = \int \frac{1}{2}[\sin(7x+2x)+\sin(7x-2x)]\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 9x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 5x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{\cos 9x}{9}) + \frac{1}{2}(-\frac{\cos 5x}{5}) + c = -\frac{\cos 9x}{18} - \frac{\cos 5x}{10} + c \quad \blacksquare$$

19(a) Lista 12 - $\int \cos^2 5x\, dx$.

Resolução:

Pela fórmula $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$,

$$\int \cos^2 5x\, dx = \int \frac{1+\cos 10x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 10x}{10}\right) + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin 10x}{20} + c \quad \blacksquare$$

23(c Lista 12 - Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto $\{(x,y) : 1 \le x \le 4 \text{ e } 0 \le y \le \sqrt{x}$.

Resolução:

O conjunto é a região abaixo do gráfico da função raíz quadrada, acima do eixo Ox e entre as retas $x = 1$ e $x = 4$.

O volume V é,

$$V = \int_1^4 \pi(\sqrt{x})^2\, dx = \int_1^4 \pi x\, dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = \frac{\pi}{2}(4^2-1) = \frac{15\pi}{2} \quad \blacksquare$$

25(d) - Lista 12 - Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo Oy do conjunto $\{(x,y) : y^2 \le x \le \sqrt{y}\}$.

Resolução: Esboçando a região não é difícil ver que o volume procurado é

$$\int_0^1 2\pi x\sqrt{x}\, dx - \int_0^1 2\pi x x^2\, dx = 2\pi\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\, dx - 2\pi\int_0^1 x^3\, dx$$

$$= 2\pi\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 - 2\pi\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 2\pi(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}) = 2\pi\frac{3}{20} = \frac{3\pi}{10} \quad \blacksquare$$

- Calcule $\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx$.

Resolução: Multiplicando pelo conjugado numerador e denominador obtemos,

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\, dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int (\sec^2 - \sec x \tan x)\, dx =$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \sec x \tan x\, dx = \tan x - \sec x + c\ .$$