GEOMETRIA ANALÍTICA - MAT 105 - Instituto de Geociências - USP

1 semestre de 2011

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

DÚVIDAS

(4) (L1) **(Parte do exercício proposto)** Num triângulo $\Delta(ABC)$, seja X a intersecção do lado $\overline{AB}$ com a bissetriz interna do ângulo $A\widehat{C}B$.

(a) Moste que $\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|}+\frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ é paralelo a $\overrightarrow{CX}$.

(b) Prove que $\frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|}=\frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|}$

(c) Exprima $\overrightarrow{CX}$ e X em função de A, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Resolução:

(a) : Resolvida em sala de aula.

(b) e (c): Pelo ítem (a) temos que existe um número real λ tal que

$$\overrightarrow{CX} = \lambda\Big(\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|}+\frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}\Big) = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CA}\|}\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}\overrightarrow{CB}\ .$$

Por outro lado, é óbvio que

$$\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{CA}\ +\ \overrightarrow{AX}$$

e é claro que existe um número real ν tal que

$$\overrightarrow{AX}=\nu\overrightarrow{AB}\ =\ \nu(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\ =\ -\nu\overrightarrow{CA}+\nu\overrightarrow{CB}.$$

Substituindo na segunda equação acima a primeira e a terceira equações obtemos,

$$\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CA}\|}\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}\overrightarrow{CB}\ =\ \overrightarrow{CA}\ +\ -\nu\overrightarrow{CA}\ +\ \nu\overrightarrow{CB}.$$

Donde segue,

$$\Big(\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CA}\|}-1\ +\nu\Big)\overrightarrow{CA}\ +\ \Big(\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}-\nu\Big)\overrightarrow{CB}\ =\ \overrightarrow{0}.$$

Então, como $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CA}$ não tem mesma direção temos (já provamos em sala de aula)

$$\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CA}\|}-1\ +\nu=0 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}-\nu=0\ .$$

Assim segue: $\nu=\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ e então $\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CA}\|}+\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}=1$, donde $\frac{1}{\|\overrightarrow{CA}\|}+\frac{1}{\|\overrightarrow{CB}\|}=\frac{1}{\lambda}$ e

$$\lambda=\frac{1}{\frac{1}{\|\overrightarrow{CA}\|}+\frac{1}{\|\overrightarrow{CB}\|}}\ .$$

Isto é, λ é o dobro da média harmônica entre os números reais $\|\overrightarrow{CA}\|$ e $\|\overrightarrow{CB}\|$.

Logo, o vetor $\overrightarrow{CX}$ é dado por

$$\overrightarrow{CX} = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CA}\|}\overrightarrow{CA} + \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}\overrightarrow{CB}, \quad \text{com} \quad \lambda = \frac{1}{\frac{1}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{1}{\|\overrightarrow{CB}\|}},$$

mostrando uma das solicitações.

Notemos que podemos reescrever o número real λ como $\lambda = \frac{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|}$.

Ainda mais, como a constante real ν é dada por

$$\nu = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|} \cdot \frac{1}{\|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|},$$

segue que o módulo do vetor $\overrightarrow{AX}$ é dado por

$$\|\overrightarrow{AX}\| = \nu\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|},$$

donde segue,

$$\frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}.$$

Agora, notando que

$$1 - \nu = 1 - \frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|} \quad \text{e} \quad \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{1-\nu} = \|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|$$

temos que

$$\frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{AX}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\| - \nu\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{(1-\nu)\cdot\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|},$$

e provamos que (observemos que o resultado que segue é muito mais forte que **O Teorema da Bissetriz Interna em Geometria Euclidiana**)

$$\frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{AX}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\| + \|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\|\overrightarrow{CB}\|}{\|\overrightarrow{BX}\|}.$$

Finalmente, o ponto X nós podemos escrever como

$$X = C+\overrightarrow{CX} = A+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CX} = A-\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CA}\|}\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{\|\overrightarrow{CB}\|}\overrightarrow{CB}, \ \text{com} \ \lambda = \frac{1}{\frac{1}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \frac{1}{\|\overrightarrow{CB}\|}} \ \blacksquare$$

Por favor, completem os detalhes que considerarem necessários desta demonstração.

(5) (L2) Consideremos os ângulos $\alpha = C\hat{A}B$, $\beta = A\hat{B}C$ e $\gamma = B\hat{C}A$. Supondo α e β não retos, utilizemos as relações (faça uma figura)

$$h = \|\overrightarrow{AX}\| \tan\alpha \;=\; \|\overrightarrow{BX}\| \tan\beta \;.$$

Destaquemos a equação

$$(1) \qquad \overrightarrow{CX} \;=\; \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} \;.$$

Suponhamos α e β agudos. Logo, $\tan\alpha > 0$ e $\tan\beta > 0$. Ainda, a altura $\overline{CX}$ está contida no interior do triângulo $\Delta(ABC)$ e o ponto X pertence ao lado $\overline{AB}$, que é oposto ao vértice C.

Assim, $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{XB}$ tem mesma direção e sentido que $\overrightarrow{AB}$. Segue então que

$$(\tan\alpha)\overrightarrow{AX} = (\tan\beta)\overrightarrow{XB} \;.$$

Multiplicando por $\tan\beta$ a identidade

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$$

obtemos

$$(\tan\beta)\overrightarrow{AB} = (\tan\beta)\overrightarrow{AX} + (\tan\beta)\overrightarrow{XB} = (\tan\beta)\overrightarrow{AX} + (\tan\alpha)\overrightarrow{AX} = (\tan\alpha + \tan\beta)\overrightarrow{AX}.$$

Obtemos então a segunda equação:

$$(2) \qquad \overrightarrow{AX} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}\overrightarrow{AB} \;.$$

Substituindo (2) em (1) encontramos,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{CA} + \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha\,+\,\tan\beta}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha\,+\,\tan\beta}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\
&= \overrightarrow{CA} + \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\overrightarrow{AC} + \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{CA} - \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\overrightarrow{CA} + \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\overrightarrow{CB} \\
&= \Big(1 - \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\Big)\overrightarrow{CA} + \tfrac{\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\overrightarrow{CB} \;.
\end{aligned}$$

Atendemos assim uma das solicitações. Atendendo a mais uma temos,

$$\begin{aligned}
X &= A + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} = A - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CX} \\
&= A - \frac{\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}\overrightarrow{CA} + \frac{\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}\overrightarrow{CB} \;.
\end{aligned}$$

O caso em que **ou** α **ou** β **é obtuso** é deixado ao leitor ■

(19) (L1) Claramente temos: $X \in \overline{AB} \Leftrightarrow X = A + t\overrightarrow{AB}$, com $0 \le t \le 1$. Iniciemos a prova.

($\Rightarrow$) Suponhamos $X = A + t\overrightarrow{AB}$, com $0 \le t \le 1$. Então temos $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ e assim,

$$\begin{aligned} X &= C + \overrightarrow{CX} = C + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX} \\ &= C + \overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{AB} = C + \overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{CB} \\ &= C + (1-t)\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB} \,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overrightarrow{CX} = (1-t)\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}, \quad \text{com } \alpha = 1 - t \ge 0 \,, \beta = t \ge 0 \ \text{ e } \ \alpha + \beta = 1 \,.$$

$\Leftarrow$) Por hipótese: $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$, e $\alpha + \beta = 1$. Logo, $\alpha = 1 - \beta$ e

$$\begin{aligned} X &= C + \overrightarrow{CX} = C + (1-\beta)\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} \\ &= C + \overrightarrow{CA} - \beta\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} \\ &= A + \beta\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{CB} \\ &= A + \beta(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= A + \beta\overrightarrow{AB} \ , \text{ com } \ 0 \le \beta \le 1 \,. \end{aligned}$$

Donce, $X \in \overline{AB}$ ■

(20) (L1) **Ceviana** é o segmento de reta que, em um triângulo, une um vértice de um triângulo ao lado oposto a tal vértice.

Em um triângulo $\Delta(ABC)$, um ponto X é um **ponto interior a** $\Delta(ABC)$ se e só se

$$\begin{cases} X = C + \lambda\overrightarrow{CY}, & \text{com } 0 < \lambda < 1, \text{ e} \\ Y = A + \nu\overrightarrow{AB}, & \text{com } 0 < \nu < 1. \end{cases}$$

Iniciemos a prova.

($\Rightarrow$) Como X é um ponto interior, utilizando a notação acima temos $\overrightarrow{AY} = \nu\overrightarrow{AB}$ e assim,

$$\overrightarrow{CY} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AY} = \overrightarrow{CA} + \nu\overrightarrow{AB}.$$

Do sistema e da equação acima, obtemos $X = C + \lambda\overrightarrow{CA} + \lambda\nu\overrightarrow{AB}$. Donde segue,

$$\overrightarrow{CX} = \lambda\overrightarrow{CA} + \lambda\nu(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

que, pondo $\overrightarrow{CA}$ em evidência, implica

$$\overrightarrow{CX} = (\lambda - \lambda\nu)\overrightarrow{CA} + \lambda\nu\overrightarrow{CB};$$

é claro que $0 < \lambda\nu < \lambda < 1$ e consequentemente

$$\begin{cases} \overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}, \\ \text{com} \\ 0 < \alpha = \lambda - \lambda\nu < 1, \quad 0 < \beta = \lambda\nu < 1 \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = \lambda < 1 \quad \text{(como desejávamos).} \end{cases}$$

($\Leftarrow$) Por hipótese temos $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\alpha + \beta < 1$. Consideremos então o ponto Y (o qual existe, justifique) tal que

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CY}.$$

Temos então, $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{CY}$.

Assim, introduzindo a notação $\lambda = \alpha + \beta$ obtemos

$$X = C + \overrightarrow{CX} = C + \lambda\overrightarrow{CY}, \quad \text{com} \quad 0 < \lambda < 1$$

e finalmente, mostrando que Y está no interior do intervalo $\overline{AB}$,

$$\begin{aligned} Y = C + \overrightarrow{CY} &= C + \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CA} + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CB} \\ &= A + \overrightarrow{AC} + \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CA} + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CB} \\ &= A + \overrightarrow{AC} - \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AC} + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CB} \\ &= A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AC} + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CB} \\ &= A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AC} + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{CB} \\ &= A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}, \quad \text{com } 0 < \tfrac{\beta}{\alpha+\beta} < 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(21) (L1) Como X pertence às retas $\overleftrightarrow{CM}$ e $\overleftrightarrow{BP}$, existem números reais s e t tais que

(1) $$X = C + s\overrightarrow{CM} = B + t\overrightarrow{BN}\ .$$

Pelas hipótese temos,

(2) $$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\ .$$

Temos também as identidades abaixo,

(3) $$\begin{cases} C &= A + \overrightarrow{AC} \\ B &= A + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\ . \end{cases}$$

Substituindo as equações em (2) e (3) na equação (1) obtemos

$$A + \overrightarrow{AC} + s(\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = A + \overrightarrow{AB} + t(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC})\ .$$

Então, cancelando o ponto A obtemos a equação vetorial

$$(1 - s - \frac{t}{4})\overrightarrow{AC} = (1 - \frac{2s}{3} - t)\overrightarrow{AB}\ ,$$

cuja solução, já que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ não tem mesma direção, é obtida para s e t saisfazendo

$$\begin{cases} s + \frac{t}{4} = 1 \\ \\ \frac{2s}{3} + t = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{9}{10} \quad \text{e} \quad t = \frac{4}{10}\ .$$

Consequentemente, obtemos

$$X = A + \overrightarrow{AC} + \frac{9}{10}(-\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = A + \frac{6}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{10}\overrightarrow{AC} \quad \blacksquare$$

Exercício 8 - Secção 10.6, p. 691, livro Cálculo, J. Stewart, 5 edição.

Escreva a equação polar da hipérbole com o foco na origem, excentricidade $e = 3$ e reta diretriz

$$r = 6\text{cossec}\theta \ .$$

Solução. Temos $r = \frac{6}{\sin\theta}$. Logo, $1 = \frac{6}{r\sin\theta}$ e, como $r\sin\theta = y$, temos então $y = 6 = d$ é a reta diretriz. Logo, podemos utilizar a forma polar (c) de uma cônica dada na página 689:

$$r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta} \ .$$

Assim, a resposta é:

$$r = \frac{18}{1 + 3\sin\theta} \quad \blacksquare$$