MAT 103 - Complementos de Matemática - FEAUSP
3ª Prova - 30/06/2011

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Extra	
Total	

Nome : ____________________**GABARITO**____________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

Justifique todas as passagens.
Boa Sorte!

1. Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2$.

Determine todos os limites necessários, pontos de máximo e mínimo locais e globais, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades e pontos de inflexão.

Resolução:

Notemos que $x = 0$ é raíz dupla e assim f tem no máximo mais três raízes reais,

$$f(x) = x^2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 1\right) .$$

(i) O domínio de f é $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ pois f é um polinômio com monômio dominante $\frac{x^5}{5}$.

(iii) $f'(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = x(x^3 - 2x^2 - x + 2) = x(x-1)(x^2 - x - 2)$ e

$$f'(x) = x(x-1)(x+1)(x-2) .$$

As raízes de f' são, em ordem crescente, -1, 0, 1 e 2.

Temos: $f' > 0$ em $(-\infty, -1)$, $f' < 0$ em $(-1, 0)$, $f' > 0$ em $(0, 1)$, $f' < 0$ em $(1, 2)$ e $f' > 0$ em $(2, +\infty)$.

Assim: $f \nearrow$ em $(-\infty, -1)$, $f \searrow$ em $(-1, 0)$, $f \nearrow$ em$(0, 1)$ $f \searrow$ em$(1, 2)$ e $f \nearrow$ em $(2, +\infty)$.

Ainda,

$x = -1$ é ponto de máximo local, $x = 0$ é ponto de mínimo local,

$x = 1$ é ponto de máximo local, e $x = 2$é ponto de mínimo local .

(iv) $f''(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 = (x - \frac{1}{2})(4x^2 - 4x - 4) = 4(x - \frac{1}{2})(x^2 - x - 1)$ e

$$f''(x) = 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}) \ .$$

As raízes de f'' são, em ordem crescente, $\quad \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \ \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Temos: $\quad f'' < 0$ em $(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$, $f'' > 0$ em $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$,

$f'' < 0$ em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$ e $f'' > 0$ em $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)$,

Assim, identificamos as concavidades de f em cada intervalo como:

$$\cap \text{ em } (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}), \quad \cup \text{ em } (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}),$$

$$\cap \text{ em } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}), \text{ e } \cup \text{ em } (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty) \ .$$

(v) $f(-1) = \frac{33}{30}$, $f(0) = 0$ e 0 é raíz dupla de f, $f(1) = \frac{11}{30}$ e
$f(2) = \frac{32}{5} - \frac{16}{2} - \frac{8}{3} + 4 = 6 + \frac{2}{5} - 8 - 2 - \frac{2}{3} + 4 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{6-10}{15} = -\frac{4}{15}$.

(vi) Pontos de inflexão: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ ■

2. Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$.

   Determine todos os limites necessários, pontos de máximo e mínimo locais e globais, intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades e pontos de inflexão.

Resolução: Vide questão anterior. Vide exemplos resolvidos em H. Guidorizzi.

3. Calcule:

a) $\displaystyle\int_1^4 (3x-2)^3\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{+1} x^2 e^{x^3}\,dx$

Resolução:

(a) Com a mudança de variáveis $u = 3x - 2$ temos $du = 3dx$. Logo,

$$\int_1^4 (3x-2)^3\,dx = \int_1^{10} u^3\,\frac{du}{3} = \left.\frac{u^4}{12}\right|_1^{10} = \frac{9999}{12} = \frac{3333}{4}\ .$$

(b) Com a mudança de variáveis $u = x^3$ temos $du = 3x^2dx$. Logo,

$$x^2\,dx = \frac{du}{3}$$

e

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3}\,dx = \int_{-1}^{1} e^u\,\frac{du}{3} = \left.\frac{e^u}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{e-e^{-1}}{3} \qquad \blacksquare$$

4. Calcule a área da região $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ \text{ e } \ \dfrac{1}{x^2} \leq y \leq 5 - 4x^2\right\}$. Ainda, esboce a região A.

Resolução: As intersecções da parábola com a concavidade para baixo e vértice $(0,5)$ com a curva $y = 1/x^2$ são determinadas pela equação

$$5 - 4x^2 = \frac{1}{x^2} \ .$$

Logo, estas intersecções são $(1,1)$ e $\frac{1}{2}, 4)$.

Portanto, a área procurada é

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(5 - 4x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(5x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = 5 - \frac{4}{3} + 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{6} - 2 = \frac{1}{3} \quad \blacksquare$$

5. Calcule (faça uma questão por folha):

a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

Dica: Fatore x^3-x^2-x+1. Note que $x=1$ é uma raíz.

Resolução: Inicialmente notemos que $1 =$grau$(2x+1) < 3 =$grau(x^3-x^2-x+1). Assim, a função racional apresentada já está na forma simplificada.

Temos $x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1)$. Escrevendo

$$\frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} \ ,$$

pelo Método das Frações Parciais existem constantes reais A, B e C tais que

$$(*) \qquad \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \ .$$

Note que: o polinômio $(x-1)^2$ é uma potência de um polinômio de grau um e assim, o coeficiente que surge no numerador da parcela que lhe corresponde é um número real e **Não** um polinômio de grau um do tipo B_1x+B_2, com $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

Determinar B e C é trivial. Efetue ordenadamente as operações abaixo em (*):

- multiplique por $(x-1)^2$ e então compute em $x=1$, obtendo $\frac{3}{2} = B$
- multiplique por $x+1$ e então compute em $x=-1$, obtendo $\frac{-1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4} = C$.

Por fim, para obter A, compute (*) em $x=0$, obtendo

$$1 = -A + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \ .$$

Logo, $A = \frac{1}{4}$.

Assim temos,

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{3/2}{(x-1)^2} - \frac{1/4}{x+1} \ .$$

Portanto,

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{3/2}{(x-1)} - \frac{\ln|x+1|}{4} + k \ .$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$

Resolução: Inicialmente notemos que 0 =grau(1) $<$ 3 =grau$[(x-1)(x^2+4)]$. Assim, a função racional apresentada já está na forma simplificada.

Pelo Método das Frações Parciais, determinemos A, B e C em $\mathbb{R}$ tais que

$$(*) \qquad \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Dterminemos A, B e C efetuando ordenadamente as seguintes operações em (*):

- multiplique (*) por (x-1) e então compute em $x = 1$, obtendo $A = \frac{1}{5}$.
- a seguir, compute (*) em $x = 0$, obtendo

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{5} + \frac{C}{4} \implies C = -\frac{1}{5}\ .$$

- encontre B computando (*) em $x = -1$ (por exemplo):

$$-\frac{1}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{-B-1/5}{5} \implies B = -\frac{1}{5}\ .$$

Finalmente temos,

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{5} - \frac{1}{10}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{4[(\frac{x}{2})^2+1]} =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{5} - \frac{\ln(x^2+4)}{10} - \frac{1}{20}\int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2+1} =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{5} - \frac{\ln(x^2+4)}{10} - \frac{1}{20}.2\arctan(\frac{x}{2}) + k \ \blacksquare$$

Extra. Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

Resolução: Inicialmente notemos que $0 = $grau$(1) < 4 = $grau$[(x+1)^2(x^2+1)]$. Assim, a função racional apresentada já está na forma simplificada.

Pelo Método das Frações Parciais existem A, B, C e D em $\mathbb{R}$ tais que

$$(*) \qquad \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Determinemos A, B, C e D efetuando ordenada/e as seguintes operações em (*):

- Multiplique (*) por $(x+1)^2$ e então calcule em $x=-1$, obtendo $B = \frac{1}{2}$
- Mude $\frac{1/2}{(x+1)^2}$ de lado obtendo

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Logo,

$$\frac{1-x^2}{2(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

e, simplificando (é necessário simplificar para aplicar novamente o Método)

$$(**) \qquad \frac{1-x}{2(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\ .$$

- Multiplique (**) por $(x+1)$ e só então compute em $x=-1$, obtendo $A = \frac{1}{2}$.
- Compute (**) em $x=0$, obtendo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + D \quad \Longrightarrow \quad D = 0\ .$$

- Compute (**) em $x=1$, obtendo

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{C}{2} \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{2}\ .$$

Finalmente temos,

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\ln|x+1|}{2} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{\arctan x}{2} + k \quad \blacksquare$$