MAT 103 - Complementos de Matemática para Contabilidade - FEAUSP
1º semestre de 2011
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

**INTEGRAL**

Suponhamos uma torneira aberta em um recipiente e com a velocidade de escoamento da água (**a vazão, ou fluxo**) variando com o tempo.

Conhecendo o fluxo em cada instante num período, digamos $[0, T]$, é razoável que possamos determinar a variação da quantidade de água neste período.

Denotando por $Q(t)$ a quantidade de água no recipiente no instante $t$ e introduzindo instantes intermediários $0 = t_0 < ... < t_i < ... < t_n = T$, a variação no período $[0, T]$ é a soma das variações nos subintervalos temporais:

$$(1) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} [Q(t_i) - Q(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]} \ .$$

A taxa de variação de $Q = Q(t)$ em $[t_{i-1}, t_i]$ é a vazão num determinado instante $\overline{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$ (vide teorema do valor médio e/ou sua interpretação). Isto é, pondo $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$,

$$(2) \qquad \frac{\Delta Q|_{[t_{i-1} - t_i]}}{\Delta t_i} = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = Q'(\overline{t_i}) \ .$$

Combinando (1) e (2) obtemos,

$$(3) \qquad Q(T) - Q(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q|_{[t_i - t_{i-1}]}}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} Q'(\overline{t_i}) \Delta t_i \ .$$

Definimos então **a integral de** $Q'$ [que notamos $\int_0^T Q'(t)dt$] como o limite dos somatórios,

$$\sum_{i=1}^{n} Q'(c_i) \Delta t_i \ , \ c_i \text{ arbitrário em } [t_{i-1}, t_i] \ ,$$

quando os comprimentos dos sub-intervalos tendem todos a zero. Assim, se tal limite existir, e ele existe se $Q'$ é continua, temos,

$$Q(T) - Q(0) = \int_0^T Q'(t)dt \qquad \blacksquare$$

**Interpretação:** a variação da quantidade de água é a integral do fluxo no período considerado. Retornem a ela ao estudarem no Cálculo III o Teorema da Divergência, ou de Gauss.

Notando que $Q$ é uma primitiva de $Q'$ e trocando $Q'$ por $f$ é fácil ver que podemos reenunciar o resultado acima como: dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $F$ uma primitiva de $f$ temos,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \ .$$

Os cálculos acima constituem com um mínimo de cuidados uma demonstração do 1º Teorema Fundamental do Cálculo, como mostramos a seguir.

**1º Teorema Fundamental do Cálculo:** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável e tal que $F' = f$. Então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

**Prova:**

Por definição,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ ,$$

onde $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < x_n = b\}$ é uma **partição** de $[a, b]$, $|\mathcal{P}| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \max\{\Delta x_1, ..., \Delta x_n\}$ é a **norma** da partição $\mathcal{P}$, $\mathcal{E} = \{c_1, .....c_n\}$ é uma **escolha** arbitrária de pontos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$ subordinada à partição $\mathcal{P}$ e

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\ ,$$

é a **soma de Riemann** relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha $\mathcal{E}$.

Seja $\mathcal{P} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Temos,

$$F(b) - F(a) = [F(x_1) - F(x_0)] + [F(x_2) - F(x_1)] + ...[F(x_n) - F(x_{n-1})]$$

e, pelo TVM para Derivadas, existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i$. Logo, como $F'(c_i) = f(c_i)$, a soma de Riemmann de $f$ relativa à esta partição $\mathcal{P}$ e a esta particular escolha $\mathcal{E} = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ é

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

Assim, para toda partição $\mathcal{P}$ existe uma escolha $\mathcal{E}$ tal que o valor da soma de Riemann correspondente é $F(b) - F(a)$. Portanto, como existe o limite para escolhas arbitrárias subordinadas a uma partição, tal limite é igual ao valor já obtido: $F(b) - F(a)$ ■

Assumiremos neste texto o seguinte resultado,

**Teorema:** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então $f$ é integrável.
**Prova:** Vide H. L. Guidorizzi, Cálculo 1, 5ª ed., LTC Editora, pp 519-525 ■

Passamos então a provar o intuitivo e importante resultado,

**Teorema:** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f \ge 0$ e $f(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in [a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0\ .$$

**Prova:**

Suporemos $x_0 \in (a, b)$ pois a demonstração é semelhante nos casos $x_0 = a$ e $x_0 = b$.

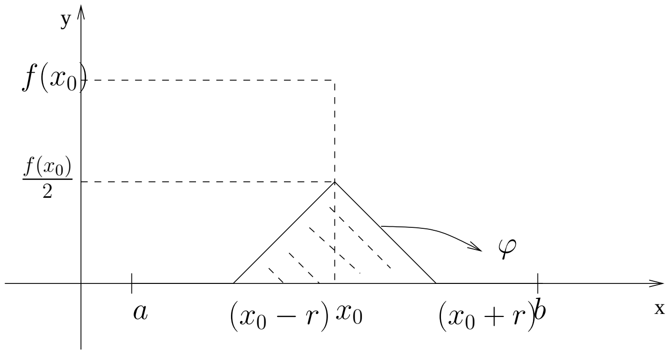


Figura 1: A integral de $\varphi$, com $f \geq \varphi \geq 0$.

Por continuidade, existe um intervalo $J = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$ tal que

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}\,, \quad \forall x \ \in [x_0 - r\,, x_0 + r] \ .$$

Então, a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ (vide figura abaixo) definida por,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, \ \text{se } x \in [a, x_0 - r] \text{ ou se } x \in [x_0 + r, b]\,, \\ \varphi(x_0) = \frac{f(x_0)}{2} \\ \text{linear sobre os segmentos } [x_0 - r, x_0] \text{ e } [x_0 + r, b]\,, \end{cases}$$

é contínua, satisfaz $f(x) \geq \varphi(x)\,, \forall x \in [a, b]$, e ainda,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \varphi(x)\,dx = \frac{f(x_0)r}{2} > 0\ . \quad \blacksquare$$

**1º TVM para Integrais:** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f$ contínua. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)\ .$$

**Prova:** Vide figura abaixo.

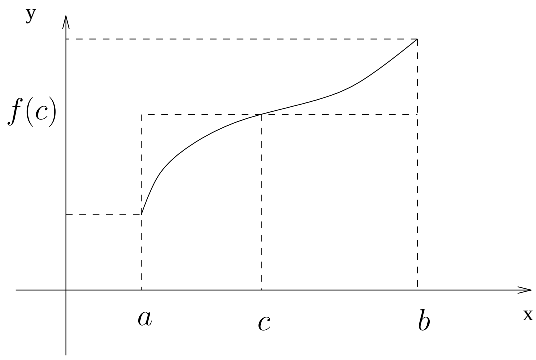


Figura 2: Ilustração para o 1º TVM para Integrais para $f$ contínua e positiva.

Se $f$ é constante é óbvio que em qualquer $c$ em $(a, b)$ a igualdade afirmada é satisfeita.

Se $f$ não é constante, sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de $f$, respectivamente. Então, $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, e existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $m < f(x_0) < M$, e como $f$ contínua, obtemos $\int_a^b [f(x) - m]\, dx > 0$ e $\int_a^b [M - f(x)]\, dx > 0$. Logo,

$$\int_a^b m\, dx < \int_a^b f(x)\, dx < \int_a^b M\, dx\,, \quad \text{donde} \quad m < \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} < M\,,$$

e portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (x_1, x_2)$ (ou $(x_2, x_1)$) tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} \qquad \blacksquare$$

Passamos então a provar o,

**2º Teorema Fundamental do Cálculo:** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, está bem definida a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,,$$

e ainda, $F$ é uma primitiva de $f$. Isto é, $F$ é derivável e $F'(x) = f(x)\,, \forall x \in [a, b]$.

**Prova:**

Utilizando propriedades elementares de integrais e o TVM para integrais temos,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h} = \frac{f(c)h}{h} = f(c)$$

para algum $c = c(h)$ entre $x$ e $x + h$. Se $h \to 0$, $c \to x$ e devido à continuidade de $f$ segue que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f\big(\, c(h)\,\big) = f(x)\,,$$

o que prova que $F$ é derivável e que $F' = f \quad \blacksquare$

**2º TVM para Integrais** Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f$ e $g$ contínuas, com $g \geq 0$ e $\int_a^b g(x)\, dx > 0$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(**) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.$$

**Prova:**

Sejam $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ o mínimo e máximo de $f$, respectivamente. Então, $\forall x \in [a, b]$ temos $m \leq f(x) \leq M$ e ainda, $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Consideremos

$$\gamma = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx}$$

**Caso 1:** Se $m < \gamma < M$, pelo TVI existe $c \in (x_1, x_2)$ (ou $(x_2, x_1)$) tal que $f(c) = \gamma$.

**Caso 2:** Se $\gamma = M$ então $\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx = 0$ e portanto, como $[M - f(x)]g(x) \geq 0$, temos $[M - f(x)]g(x) = 0\,, \forall x \in [a, b]$, e como $g$ não se anula em algum intervalo aberto $J$, segue que $f$ é então constante e igual a $M$ em $J$ e assim, todo $c$ em $J$ satisfaz (**).

**Caso 3:** $(\gamma = m)$ Basta aplicar o Caso 2 ao par de funções $-f$ e $g$ ■

**Interpretação:** Se $f$ é contínua, $f$ assume a sua média ponderada por $g \geq 0$ se $\int_a^b g(t)\,dt > 0$.

**Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Indefinida):** Sejam $f$ e $g$ deriváveis em $(a, b)$. Então, $f'g$ admite primitiva em $(a, b)$ se e só se $fg'$ também admite e, neste caso,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\ .$$

**Prova:**

Pela fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ temos

$$fg' = (fg)' - f'g\,,$$

donde concluímos que $\psi$ é uma primitiva de $f'g$ se e somente se $fg - \psi$ é uma primitiva de $fg'$. Isto é, $\psi' = f'g \Leftrightarrow (fg - \psi)' = fg'$ ■

**Notação:** Usualmente lembramos da fórmula de integração por partes escrevendo,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\ .$$

**Proposição (Fórmula da Integração por Partes na Integral Definida):** Sejam $f$ e $g$ funções com derivadas contínuas em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

**Prova:**

Pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b\ .$$

Da fórmula $(fg)' = f'g + fg'$ a da linearidade da integral definida segue que,

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ .$$

Eliminando $\int_a^b (fg)'(x)\,dx$ das duas equações acima obtidas concluímos a tese ■

**Proposição (Mudança de Variável na Integral Indefinida):** Seja $I$ um intervalo e consideremos $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\varphi : y \in J \mapsto x = \varphi(y) \in I$, $J$ um intervalo, é inversível e derivável com inversa $\varphi^{-1} : x \in I \mapsto y = \varphi^{-1}(x) \in J$ também derivável. Se

$$\int f\big(\varphi(y)\big)\,\varphi'(y)\,dy = F(y) + k\,, y \in J \quad \text{e } k \text{ fixo em } \mathbb{R}\,,$$

então,

$$\int f(x)\,dx = F\big(\varphi^{-1}(x)\big) + k\ .$$

**Prova:**

Aplicando a regra da cadeia, a hipótese sobre $F$ e novamente a regra da cadeia obtemos,

$$(F \circ \varphi^{-1})'(x) = F'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(x) =$$

$$= f(x) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \quad \blacksquare$$

**Teorema da Mudança de Variável:** Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua, $I$ um intervalo e $a$ e $b$ arbitrários em $I$ . Seja $\varphi : [c, d] \to I$ tal que $\varphi'$ é contínua e $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. Então,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy\ .$$

**Atenção:** Não é necessário $a < b$.

**Prova:** Como $f$, $\varphi$ e $\varphi'$ são contínuas, as duas integrais definidas acima existem. Ainda, por ser contínua $f$ admite uma primitiva $F$ e então, pelo 1º Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Ainda mais, pela regra da cadeia temos

$$(F \circ \varphi)'(y) = F'\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y) = f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)$$

e então, aplicando novamente o 1º TFC obtemos

$$\int_c^d f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,dy = (F \circ \varphi)(d) - (F \circ \varphi)(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \blacksquare$$