MAT 103 - Complementos de Matemática (Contabilidade) - 2 semestre de 2013 - FEAUSP

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

FRAÇÕES PARCIAIS[1]

Idéia. Consideremos uma divisão de polinômios

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

ambos com coeficientes reais e, ainda, grau(P) <grau(Q). O objetivo é escrever este quociente como um somatório de parcelas "bem mais simples". Procedemos da seguinte forma. Decompondo o polinômio Q como um produto de fatores lineares do tipo $(x-\alpha)^m$, com α uma raíz real de Q e $m = m(\alpha)$ a multiplicidade algébrica de tal raíz de Q, e também de fatores quadráticos $(x^2+ax+b)^n$, onde o polinômio x^2+bx+c não tem raízes reais (discriminante negativo) e n é a multiplicidade algébrica de tal polinômio, temos que:

(1) Cada fator linear $(x-\alpha)^m$ gera as m parcelas (no somatório procurado)

$$\frac{C_1}{(x-\alpha)}, \dots, \frac{C_m}{(x-\alpha)^m},$$

onde C_1,...,C_m são constantes reais a serem determinadas.

(2) Cada fator quadrático $(x^2+bx+c)^n$ gera as n parcelas (no referido somatório)

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+bx+c)}, \dots, \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+x)^n},$$

onde as constantes A_1, B_1,...A_n,B_n são reais e a serem determinadas.

(3) A resposta procurada (isto é, o somatório) é então: o quociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é uma soma de parcelas do tipo das obtidas no (1) e no (2) passos acima.

(4) Para determinarmos as constantes reais surgidas existem vários métodos.

---

[1]O teorema que segue baseia-se em dois resultados em "Analysis by Its History, E. Hairer and G. Warner, Undergraduate Texts in Mathematics, 1996, pp. 118-123, Springer-Verlag, New York". Os exemplos (dois deles do citado livro) são, entre outras formas, aqui resolvidos inspirando-nos no chamado **método de Heaviside**, vide "Cálculo, Vol 1, pp. 568-569, G. B. Thomas, Addison Wesley, 2009".

Exemplo 1. Decomponha em frações simples,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

Resolução: Efetuando a divisão polinomial obtemos uma função racional com o grau do polinômio numerador menor que o no denominador, e fatorando este,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 2x - 5 + \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} \ .$$

Pelo método acima temos,

$$(*) \qquad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2} \ .$$

Multiplicando (*) por $(x-1)^3$ e então computando em $x = 1$ obtemos $A_3 = 1$.
Multiplicando (*) por $(x+2)^2$ e então computando em $x = -2$ obtemos $B_2 = -1$.

Pondo os termos $1(x-1)^{-3}$ e $-1(x+2)^{-2}$ à direita à esquerda e simplificando,

$$(**) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19 + (x-1)^3 - (x+2)^2}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{6x^2 - 5x - 7}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+2} \ .$$

Multiplicando (**) por $(x-1)^2$ e, aí, avaliando a fração central (no lado direito) em $x = 1$ obtemos $A_2 = -2$.

Multiplicando (**) por $(x+2)$ e, aí, avaliando a fração central (no lado direito) em $x = -2$ obtemos $B_1 = 3$.

Pondo, em (**), os termos $-2(x-1)^{-2}$ e $3(x+2)^{-1}$ que estão no lado direito no meio e então simplificando obtemos:

$$\frac{6x^2 - 5x - 7 + 2(x+2) - 3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{3}{x-1} = \frac{A_1}{x-1} \quad \Rightarrow \ A_1 = 3 \ .$$

Resposta: $\frac{2x^6-3x^5-9x^4+23x^3+x^2-44x+39}{x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}$ ■

Antes de darmos mais exemplos provemos o teorema.

Demonstração do Teorema da Decomposição em Frações Parciais

Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e na variável x.

Seja $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ com r distintos pares de raízes complexas conjugadas (não reais) $\alpha_1 \pm i\beta_1, ..., \alpha_r \pm i\beta_r$ e s distintas raízes reais $\gamma_1,...,\gamma_s$. Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)[2] podemos fatorar Q em seus fatores lineares e quadráticos, com suas respectivas multiplicidades algébricas, e obtemos

$$Q(x) = c\prod_{j=1}^{r}\Big((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\Big)^{m_j}\prod_{j=1}^{s}(x-\gamma_s)^{n_j}\ ,\ c \in \mathbb{R},$$

onde m_j e n_j são as multiplicidades das raízes complexas e reais, respectivamente.

Teorema 1. Seja $Q = Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ como acima e $P = P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que grau$(P) <$ grau(Q). Existem, e são únicos, números reais A_{jk}, B_{jk} e C_{jk} tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{A_{jk}+B_{jk}\,x}{\Big((x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\Big)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_j}\frac{C_{jk}}{(x-\gamma_j)^k}\ . \tag{1.1}$$

Prova. Vide verso.

[2]D'Alembert em 1746 e que à época procurava métodos para integrar funções racionais apresentou uma prova do TFA que foi, à época, considerada não válida e que hoje é válida. Gauss em 1799 apresentou a mais famosa prova de tal teorema e Argand em 1814 mostrando a eficiência dos números complexos simplificou, e muito, a prova de D'Alembert e apresentou a mais clara e curta prova do TFA, até a atualidade.

Afirmação 1: Se γ é raíz real de multiplicidade n de $Q = Q(x)$ fatoramos $Q(x) = (x-\gamma)^n q(x)$, com $q \in \mathbb{R}[x]$ e $q(\gamma) \neq 0$, e existem únicos $C \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}[x]$, com $\partial(p) < \partial(Q) - 1$, satisfazendo

$$\frac{P(x)}{(x-\gamma)^n q(x)} = \frac{C}{(x-\gamma)^n} + \frac{p(x)}{(x-\gamma)^{n-1} q(x)} \,. \tag{1.2}$$

Verificação da Afirmação 1.

Multiplicando (1.2) pelo denominador comum, temos a equação polinomial

$$P(x) = Cq(x) + p(x)(x-\gamma).$$

Avaliando em $x = \gamma$ temos $C = \frac{P(\gamma)}{q(\gamma)}$ e definimos $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ como a divisão (exata) de $P(x) - Cq(x)$ por $(x-\gamma)$. As unicidades de C e $p = p(x)$ são óbvias.

Afirmação 2. Se $Q(x) = \Big((x-\alpha)^2 + \beta^2\Big)^m q(x)$ e $q(\alpha + i\beta) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}\,, \beta \in \mathbb{R}^*$, existem únicos $A, B \in \mathbb{R}$ e polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$, grau$(p) <$ grau$(Q) - 2$, tais que

$$\frac{P(x)}{\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^m q(x)} = \frac{A + Bx}{\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^m} + \frac{p(x)}{\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big)^{m-1} q(x)} \,.$$

Verificação da Afirmação 2.

Multiplicando pelo denominador comum, resolvemos a equação polinomial

$$P(x) \ = \ (A+Bx)q(x) \ + \ p(x)\Big((x-\alpha)^2+\beta^2\Big) \,.$$

Avaliando tal fórmula em $z_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ (ou $z_0 = \alpha - i\beta$) determinamos A e B reais[3] e definimos $p(x)$ como a divisão exata, em $\mathbb{R}[x]$, de $P(x) - (A+Bx)q(x)$ por $\Big((x-\alpha)^2+\beta^2)\Big)$. A unicidade é elementar e encerra tal verificação.

Claramente, por sucessivas aplicações das Afirmações 1 e 2 obtemos (1.1). Pedimos ao leitor mostrar, é trivial, que a unicidade dos coeficientes em (1.1) (vide abaixo outra prova de tal fato) segue das unicidades nas Afirmações 1 e 2∎

[3]Pela equação $A + B(\alpha + i\beta) = \frac{P(z_0)}{q(z_0)} \in \mathbb{C}$ temos $A + B\alpha = \mathrm{Re}\Big(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\Big)$ e $B\beta = \mathrm{Im}\Big(\frac{P(z_0)}{q(z_0)}\Big)$. Se utilizarmos $z = \alpha - i\beta$ o resultado é o mesmo pois para tais $A, B \in \mathbb{R}$: $A + B\overline{z_0} = \overline{A + Bz_0} = \overline{\frac{P(z_0)}{q(z_0)}}$

Mostremos uma variação do **Método de Heaviside** (assim dito se $Q(x)$ só tem raízes reais simples) para determinar (unicamente) os coeficientes em (1.1).

Computemos os coeficientes $C_{1n_1}, C_{1,n_1-1}, ..., C_{1,2}, C_{1,1}$, nesta ordem.

Utilizando a fatoração $Q(x) = (x-\gamma_1)^{n_1} Q_1(x)$, $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$, $Q_1(\gamma_1) \neq 0$, multipliquemos (1.1) por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e computemos a equação obtida em $x = \gamma_1$. Para o 1 membro $\left(\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1} Q_1(x)}\right)$ obtemos, é óbvio, $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)}$. Quanto ao 2 membro, multiplicando a parcela $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$ por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e computando o resultado em $x = \gamma_1$ obtemos C_{1,n_1}; todas as demais parcelas ao serem multiplicadas por $(x-\gamma_1)^{n_1}$ e o resultado computado em $x = \gamma_1$ produzem o número zero. Logo,

$$C_{1,n_1} = \frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} \ .$$

Então, passando $\frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}}$ ao 1 membro e efetuando a subtração temos uma função racional com numerador e denominador divisiveis por $(x-\gamma_1)$ (Afirm. 1):

$$\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1} Q_1(x)} - \frac{C_{1,n_1}}{(x-\gamma_1)^{n_1}} = \frac{p_1(x)}{(x-\gamma_1)^{n_1-1} Q_1(x)}\,, \text{ com } \ \partial(p_1) < \partial(Q) - 1 \ .$$

Igualado o último membro acima com o que restou do 2 membro de (1.1), recaímos no caso anterior e então de forma análoga achamos o coeficiente C_{1,n_1-1}. Iterando tal procedimento identificamos os demais coeficientes $C_{1,j's}$. É claro que analogamente obtemos todos os coeficientes $C_{i's,j's}$.

Similarmente (e utilizando a Afirmação 2) obtemos ordenadamente os pares de coeficientes (A_{i,m_i}, B_{i,m_i}), $(A_{i,m_i-1}, B_{i,m_i-1}), ..., (A_{i,1}, B_{i,1})$, $i = 1, ..., l$. Verifique∎

Exemplo 2. Decomponha em frações simples $\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}$.

1 Resolução: Via o que denominamos, aqui, variação do método de Heaviside.

Pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples temos,

$$(*) \qquad \frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Multiplicando (*) por $(x^2+2)^2$ e então computando em $x = i\sqrt{2}$ obtemos

$$\frac{(i\sqrt{2})^5 + i\sqrt{2}}{-1} = Ei\sqrt{2} + F \Longrightarrow E = -5 \text{ e } F = 0\,.$$

Pondo à esquerda em (*) o termo $\frac{-5x}{(x^2+2)^2}$ obtido à direita e simplificando temos

$$(**) \qquad \frac{x^5+x+5x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{x^3+3x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}\,.$$

Multiplicando (**) por x^2+1 e então computando a expressão no meio em $x = i$:

$$\frac{i^3+3i}{i^2+2} = Ai + B \Longrightarrow A = 2 \text{ e } B = 0\,.$$

Multiplicando (**) por x^2+2 e então computando a expressão no meio em $x = \sqrt{2}i$:

$$\frac{(\sqrt{2}i)^3 + 3\sqrt{2}i}{-2+1} = C\sqrt{2}i + D \Longrightarrow C = -1 \text{ e } D = 0\,.$$

2 Resolução. Vide verso

Escrevemos $P(x) = x^5 + x$, $p(x) = (x^2+1)(x^2+2)^2$ e,

$$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2} + \frac{ex+f}{(x^2+2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e então, multiplicando ambos os membros por $p(x)$ resulta

$$(x^5+x) = (ax+b)(x^2+2)^2 + (cx+d)(x^2+1)(x^2+2) + (ex+f)(x^2+1)\,, \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Efetuando as operações indicadas no 2 membro, a igualdade acima se escreve

$$x^5+x = (a+c)x^5+(b+d)x^4+(4a+3c+e)x^3+(4b+3d+f)x^2+(4a+2c+e)x+4b+2d+f\,, \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

e (v. Corolário 3.7) obtemos o sistema linear de 6 equações com 6 incógnitas:

$$(1)\ a+c=1\,, \qquad (2)\ b+d=0\,, \qquad (3)\ 4a+3c+e=0\,, \qquad (4)\ 4b+3d+f=0\,,$$

$$(5)\ 4a+2c+e=1\,, \qquad (6)\ 4b+2d+f=1\,.$$

De (2) segue $d = -b$ e portanto (4) e (6) se escrevem, respectivamente, $b+f = 0$ e $2b+f = 0$ que é visivelmente um sistema determinado; donde, $b = f = 0$ e, então, $d = 0$. De (1) segue $c = 1-a$ e então (3) e (5) se escrevem, respectivamente, $a+e = -3$ e $2a+e = -1$; cuja solução é $a = 2$ e $e = -5$ e portanto, $c = 1-a = 1-2 = -1$ donde $c = -1$. Consequentemente,

$$\frac{x^5+x}{(x^2+1)(x^2+2)^2} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2} - \frac{5x}{(x^2+2)^2}\,, \forall x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Exemplo 3. Decomponha em frações simples $\frac{x^2+1}{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$.
Resolução: Via método de Heaviside.

O denominador fatora-se: $(x^4+5x^3+5x^2-5x-6) = (x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$. Logo, temos

$$(*) \qquad \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x+3}\ .$$

Multiplicando (*) por $(x+1)$ e, aí, computando em $x = -1$ temos: $A = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$.
Multiplicando (*) por $(x-1)$ e, aí, computando em $x = 1$ temos: $B = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.
Multiplicando (*) por $(x+2$ e, aí, computando em $x = -2$ temos: $C = \frac{5}{3}$.
Multiplicando (*) por $(x+3)$ e, aí, computando em $x = -3$ temos: $D = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$ $\blacksquare$

Antes de estudarmos o caso em que $Q(x)$ tem raízes não reais revisemos $\mathbb{C}$.

Revisão de Números Complexos.

Seja $i \in \mathbb{C}$ tal que $i^2 = -1$. Utilizando a **Fórmula de Euler**,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,,\ \ \theta \in \mathbb{R}\,,$$

temos

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)\,,\quad \forall\ x, y\ \in \mathbb{R}\ .$$

Indicando as **coordenadas polares** de $z \in \mathbb{C}$ por $r \in [0, +\infty)$ e $\theta \in \mathbb{R}$ se:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

vemos que $z = re^{i\theta}$, sendo óbvio que $|e^{i\theta}| = 1$ e consequentemente $r = |z|$.

Chamamos $(r, \theta)_o$ de **forma polar** de um número $z \in \mathbb{C}$ e identificamos:

$$z = (r, \theta)_o \quad \text{se} \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ .$$

Desta forma, se $z_1 = (r_1, \theta_1)_o$ e $z_2 = (r_2, \theta_2)_o$ temos $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ e

$$z_1z_2 = (r_1r_2, \theta_1 + \theta_2)_o\ .$$

Assim, obtemos a **Fórmula de Moivre**:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \text{se} \quad z = (r, \theta)_o\ , \forall n \in \mathbb{Z}\ .$$

Invertendo tal fórmula obtemos as n-raízes, $n \in \mathbb{N}$, de um número $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$:

Radiciação: Se $n \in \mathbb{N}$ e $z = re^{i\theta} \neq 0$, as n soluções de $\omega^n = z = re^{i\theta}$ são

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\, e^{(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})i}\,,\ \ k = 0, 1, ..., n-1\ \ ,\ \text{ou}$$

$$\omega_k = \left(\sqrt[n]{r}\,, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)_o = \sqrt[n]{r}\left(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})\ +\ i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})\right),\quad k = 0, 1, ..., n-1\ .$$

Chamamos tais soluções ω_k , $k = 0, ...n-1$, de **raízes n-ésimas de** z.

Exemplo 4. Simplifique, aplicando o método de frações parciais,

$$\frac{1}{1+x^4}\ .$$

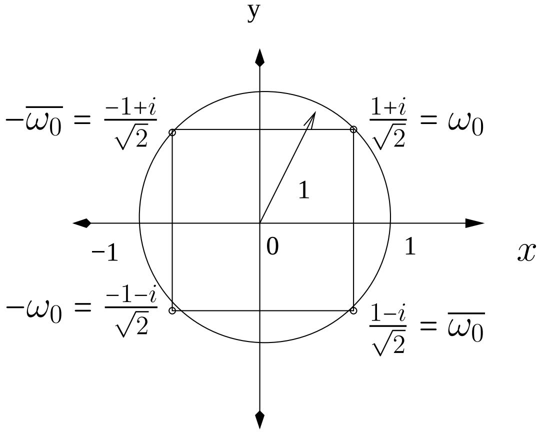

Figura 1: As quatro raízes quartas de $z = -1$.

Três Resoluções: Temos, vide Figura 1 acima,

$$z^4+1=0 \Longrightarrow z^4=-1=e^{i\pi} \Longrightarrow z=\omega_k=e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})i}=e^{(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2})i}\,, \quad k=0,1,2,3\ ;$$

isto é, $z \in \left\{\omega_0=e^{\frac{\pi}{4}i}\,,\ \omega_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\overline{\omega_0}\,,\ \omega_2=e^{\frac{5\pi}{4}i}=-\omega_0\,,\ \omega_3=e^{\frac{7\pi}{4}i}=\overline{\omega_0}\right\}$.

O polinômio x^4+1 fatora-se então como

$$x^4+1=(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}})(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}})\cdot(x-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(x-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})=(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}x+1)\ ,$$

e obtemos pelo Teorema da Decomposição em Frações Simples,

$$(*)\qquad \frac{1}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}\ .$$

1 Resolução: Não aplicando os citados métodos.

É fácil perceber que,

$$A+C=0 \ \text{ e } \ B+D=1\ .$$

Ainda, computando a expressão em (*) em $x=i$ obtemos

$$\frac{1}{2}=\frac{Ai+B}{-\sqrt{2}i}+\frac{-Ai+(1-B)}{\sqrt{2}i}=\frac{-2A}{\sqrt{2}}+\frac{1-2B}{\sqrt{2}i} \Longrightarrow A=-\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ e } B=\frac{1}{2} \Longrightarrow C=\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ e } D=\frac{1}{2}.$$

2 Resolução: Via método dos coeficientes a determinar (aritmética em $\mathbb{R}$)
Multiplicando por $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ a expressão (*) obtemos

$$\begin{aligned}1 &= (Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)\\ &= (A+C)x^3+(A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D)x^2+(A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2})x+(B+D)\ ,\end{aligned}$$

e resolvemos o sistema de equações

$$A+C=0\ \ ,\ \ A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D=0\ \ ,\ \ A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0\ \text{ e }\ B+D=1\ .$$

Substituindo a 1 $(C=-A)$ e a 4 equações na 2 temos $2A\sqrt{2}+1=0$ e $A=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Substituindo a 1 equação na 3 obtemos $B=D$ e, pela 4 equação, $B=D=\frac{1}{2}$.

3 Resolução: Via uma variação do método de Heaviside (aritmética em $\mathbb{C}$).
Escrevamos $\frac{1}{1+x^4}$ na forma

$$(**)\qquad \frac{1}{(x-\omega_0)(x-\overline{\omega_0})\cdot(x+\overline{\omega_0})(x+\omega_0)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}\qquad .$$

Multiplicando (**) por $x^2-\sqrt{2}x+1=(x-\omega_0)(x-\overline{\omega_0})$ e computando em ω_0:

$$\frac{1}{2\ \mathrm{Re}(\omega_0)\cdot 2\omega_0}=A\omega_0+B\Longrightarrow\frac{1}{4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1+i}{\sqrt{2}}}=\frac{A}{\sqrt{2}}(1+i)+B\quad\text{ou,}$$

$$\frac{1}{2(1+i)}=\frac{1-i}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i=(\frac{A}{\sqrt{2}}+B)+\frac{A}{\sqrt{2}}i\Longrightarrow A=-\frac{\sqrt{2}}{4}\ ,\ B=\frac{1}{2}\ .$$

Multiplicando (**) por $x^2+\sqrt{2}x+1=(x+\overline{\omega_0})(x+\omega_0)$ e computando em $-\omega_0$:

$$\frac{1}{-2\omega_0(-\omega_0-\overline{\omega_0})}=-C\omega_0+D\quad\text{ou,}$$

$$\frac{1}{4\omega_0\ \mathrm{Re}(\omega_0)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i=(-\frac{C}{\sqrt{2}}+D)-\frac{C}{\sqrt{2}}i\Longrightarrow C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ ,\ D=\frac{1}{2}\quad .$$

Resposta: $\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\ ,\forall x\in\mathbb{R}\ \blacksquare$

Por fim, apresentemos o "método das derivadas" (importante em "Teoria de uma Variável Complexa") que utiliza derivadas em $\mathbb{R}$ para computar os coeficientes em (1.1) correspondentes às parcelas provenientes das raízes reais.

Computemos em (1.1) os coeficientes $C_{1n_1}, ..., C_{1,1}$ relativos à raíz γ_1. Para simplificar escrevamos $n_1 = n$. Então, pela fatoração $Q(x) = (x - \gamma_1)^n Q_1(x)$, $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ e $Q_1(\gamma_1) \neq 0$, pela expressão em (1.1) temos,

$$\frac{P(x)}{(x-\gamma_1)^n Q_1(x)} = \frac{C_{1,n}}{(x-\gamma_1)^n} + \frac{C_{1,n-1}}{(x-\gamma_1)^{n-1}} + ... + \frac{C_{1,1}}{(x-\gamma_1)^1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)},$$

com $p_1 \in \mathbb{R}[x]$ [e, é fácil ver, $\partial(p_1) < \partial(Q) - n$]. Logo, multiplicando por $(x-\gamma_1)^n$,

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = C_{1,n} + C_{1,n-1}(x-\gamma_1) + C_{1,n-2}(x-\gamma_1)^2 + ... + C_{1,1}(x-\gamma_1)^{n-1} + \frac{p_1(x)}{Q_1(x)}(x-\gamma_1)^n .$$

Computando a equação acima em γ_1 resulta $\frac{P(\gamma_1)}{Q_1(\gamma_1)} = C_{1,n}$.
Computando a 1 derivada da equação acima em γ_1 resulta: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)'(\gamma_1) = C_{1,n-1}$.
Computando a 2 derivada da equação acima em γ_1 resulta: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)''(\gamma_1) = 2C_{1,n-2}$.
Por indução finita, computando a k-ésima derivada, $k = 0, 1, ..., n-1$, da equação acima em γ_1 obtemos: $\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1) = k! C_{1,n-k}$. Isto é, $C_{1,n-k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}(\gamma_1)$.

Exemplo 5. Decomponha em frações simples $\frac{x^2}{(x-1)^3}$.

Três resoluções:

1 **Resolução:** Não aplicando os citados métodos.

Temos,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{[(x-1)+1]^2}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} .$$

2 **Resolução:** Via método dos coeficientes a determinar.

Multiplicando por $(x-1)^3$ a decomposição

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

obtemos $x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)$. Logo, $A = 1$, $B = 2$ e $C = 1$.

3 Resolução: Empregando derivadas.

Basta computar mos as derivadas de ordem 0, 1 e 2 de $F(x) = x^2$ em $x = 1$. Logo,

$$C = \frac{F(1)}{0!} = 1\,, \; B = \frac{F'(1)}{1!} = 2 \;\text{ e }\; A = \frac{F''(1)}{2!} = 1 \quad \blacksquare$$

Existem ainda outros métodos para decompor uma função racional em soma de frações simples. Cada qual tem suas vantagens, sendo que a maior ou menor conveniência de um método depende do problema em questão e, é claro, de preferências individuais. Ainda, é conveniente ser "criativo".