CÔNICAS

MAT 103 - COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA PARA CONTABILIDADE

1º SEMESTRE de 2011

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

No plano euclidiano consideremos F_1 e F_2 dois pontos **(focos)** distintos.

ELIPSE

(1) Se $2a$ é um comprimento fixo e maior que a distância entre F_1 e F_2, o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$ é uma **elipse**.

A **equação padrão da elipse** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad a\,, b > 0 \ .$$

Solução: Seja s a reta por F_1 e F_2 (desenhe) e C o ponto médio entre F_1 e F_2.

Trace por C a reta t, perpendicular a s e mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$.

Só há 2 pontos em t com soma das distâncias a F_1 e F_2 igual a $2a$ (distam a de F_1 e F_2), simétricos em relação à reta s, contendo F_1 e F_2.

Por semelhança de triângulos é claro que se P é um ponto da elipse, P', o seu simétrico em relação a s, também pertence à elipse. Logo, a elipse é simétrica em relação a s.

Para o mesmo P, o ponto P'', simétrico de P em relação a t (perpend. a $\overline{F_1F_2}$), também tem a propriedade: a soma de suas distâncias a F_1 e F_2 é d. Verifique.

A figura tem eixos de simetria perpendiculares (t e s) e um centro e para desenhá-la basta fazê-lo em um quadrante e então refletir em relação às retas t e s.

Escolhamos um sistema de coordenadas cartesianas Oxy tal que Ox, o eixo x, corresponda à reta t, Oy à reta s e adotemos $O = C$, o ponto médio entre os focos, como a origem.

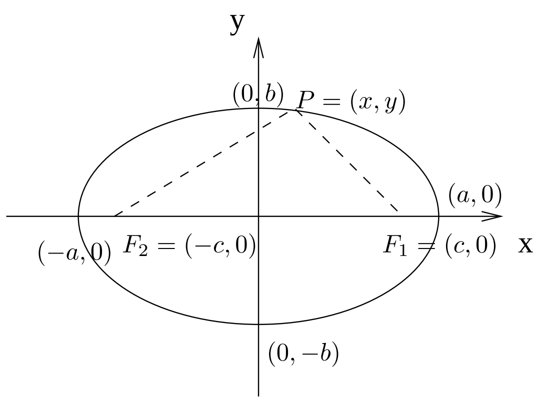

Figura 1: Focos e Vértices - Elipse

Nesse sistema: $F_1 = (\pm c, 0)$, $F_2 = (\mp c, 0)$. Suponhamos $c > 0$, $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$. O segmento $\overline{B_1 B_2}$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ pertencentes à elipse, com $b > 0$ (v. figura), é o **semi-eixo menor** da elipse. É fácil ver que $|\overline{B_2 F_1}| = |\overline{B_2 F_2}| = a$ e

$$(1) \qquad a^2 = b^2 + c^2 \ .$$

A equação da elipse adquire então a forma:

$$(2) \qquad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad .$$

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

e então chegamos às equações

$$(3) \quad |\overline{PF}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

e

$$(4) \quad |\overline{PF'}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x$$

onde (4) é obtida de (3), pois $|\overline{PF'}| = 2a - |\overline{PF}|$. O quadrado dessas equações é

$$x^2 \ \mp 2cx \ + \ c^2 + y^2 = a^2 \ \mp 2cx \ + \ \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando, $(\frac{a^2 - c^2}{a^2})x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$ obtemos, finalmente,

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mostramos que (2) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implica (2) e assim, adotamos (5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

HIPÉRBOLE

(2) O lugar geométrico dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$, $a > 0$, é uma **hipérbole**.

A **equação padrão da hipérbole** é, em coordenadas cartesianas adequadas,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad a\,,b > 0 \ .$$

Obs 1:

Se P, no plano, não é um foco, pela desigualdade triangular temos $|\overline{PF_1}| < |\overline{PF_2}| + |\overline{F_1F_2}|$. Logo, $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| < |\overline{F_1F_2}|$ e, mutatis mutandis, $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| < |\overline{F_1F_2}|$. Assim,

$$\big|\ |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\ \big| \leq |\overline{F_1F_2}|\,,\ \forall P \ .$$

A **condição de existência** da hipérbole é então: $2a < |\overline{F_1F_2}|$.

Obs 2 Para P na hipérbole temos $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$ ou $|\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$. Assim, a equação da hipérbole, não utilizando coordenadas, é,

$$(H) \qquad |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = \pm 2a \ .$$

O ramo direito (esquerdo) da hipérbole é obtido atribuindo o sinal $+$ $(-)$ em (H).

Solução Seja Oxy um sistema de cooordenadas cartesianas com o eixo x contendo $\overline{F_1F_2}$ e por eixo y a mediatriz deste segmento. Vide figura abaixo.

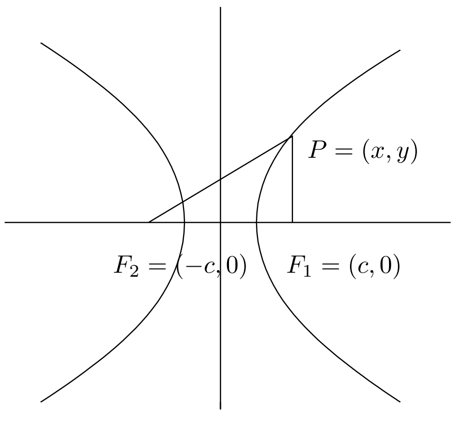

Figura 2: Hipérbole-Focos

Supondo $|\overline{F_1F_2}| = 2c$ ($0 < a < c$) temos : $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $c > 0$.

Por (H), a equação da hipérbole em coordenadas é,

$$(1)\quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a\ .$$

Passando o segundo radical para o segundo membro e elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2+y^2 \ = \ [\,\pm 2a + |\overline{PF_1}|\,]^2 \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}| + (x-c)^2+y^2\ ,$$

donde

$$4cx \ = \ 4a^2 \pm 4a|\overline{PF_1}|$$

e então, as fórmulas dos raios focais são

$$(2)\quad |\overline{PF_1}| \ = \ \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm(\frac{c}{a}x - a)$$

e

$$(3)\quad |\overline{PF_2}| \ = \ \sqrt{(x+c)^2+y^2} \ = \ \pm(\frac{c}{a}x + a)\ ,$$

onde (3) é obtida de (2), visto que $|\overline{PF_2}| = |\overline{PF_1}| \pm 2a$. Procurando manter uma notação salientamos que, assim como em (H), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da curva e o negativo ao esquerdo. Os quadrados destas equações fornecem:

$$x^2 \ \mp 2cx \ + \ c^2 \ + \ y^2 \ = \ \frac{c^2}{a^2}x^2 \ \mp 2cx \ + \ a^2\ ;$$

que reduzimos a,

$$(\frac{c^2-a^2}{a^2})x^2 - y^2 \ = \ c^2 - a^2\,,$$

ou,

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1\ .$$

Pela condição de existência, $0 < a < c$, temos $c^2 - a^2 > 0$ e escrevemos,

$$b^2 = c^2 - a^2\,,$$

e substituindo esta em (4):

$$(5)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ .$$

Mostramos que (1) implica (5). Não é difícil verificar que (5) implia (1) e assim, adotamos (5) como forma padrão da equação de uma hipérbole.

PARÁBOLA

(3) Fixados no plano euclidiano, um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz), $F \notin d$, o lugar geométrico dos pontos tais que suas distâncias a F e a d são iguais é uma **parábola**.

A **equação padrão da parábola** é, em coordenadas cartesianas,

$$x^2 \; = \; 4py \;\; p > 0 \; .$$

Obs A parábola é simétrica em relação à reta por F perpendicular a d, dita **eixo de simetria da parábola**. O ponto médio entre F e a projeção de F sobre d (equidistante entre F e d) é o ponto da parábola mais próximo de d e dito **vértice da parábola**.

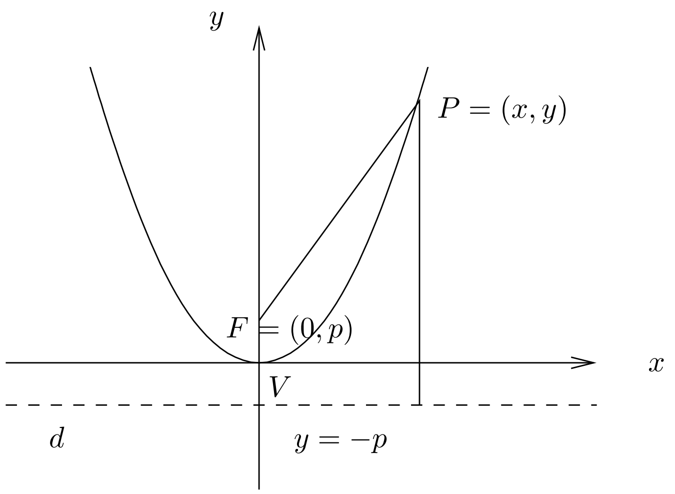

Figura 3: Parábola

Resolução

Seja Oxy um sistema cartesiano de coordenadas tal que: (i) o eixo y corresponde ao eixo de simetria (ii) a origem ao vértice, (iii) o eixo x à reta pela origem, paralela a d e, (iv) orientemos o eixo y tal que $F = (0, p), p > 0$. Assim, d tem por equação $y = -p$.

Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola temos, pela definição,

$$(1) \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$(2) \quad x^2 = 4py \; .$$

Notemos que (1) e (2) são equivalentes.

Obs A constante $p > 0$ é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, sua equação muda.

Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

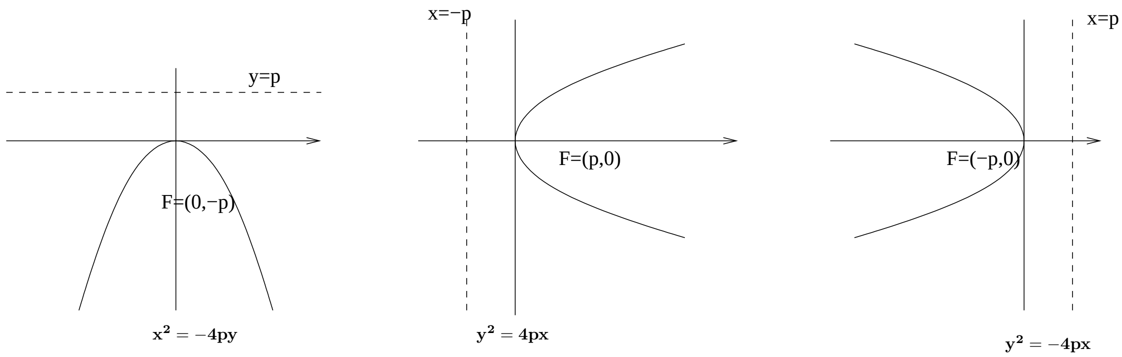

Figura 4: posições e equações- parábolas