

TEOREMAS SOBRE LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

É intuitivo que para analisarmos uma função f numa vizinhança de um ponto p não é necessário que p pertença ao domínio de f mas sim que próximo a p existam infinitos pontos do domínio da função. Introduzimos a definição abaixo.

Notação. Dados dois conjuntos A e B a diferença de conjuntos “ A menos B ” é

$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\} = \{a \in A : a \text{ não pertence a } B\}.$$

Definição. Dado $A \subset \mathbb{R}$, um ponto $p \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A (não é necessário que p pertença ao conjunto A) se todo intervalo I não degenerado e centrado em p , e então da forma $I = (p - \delta, p + \delta)$ com $\delta > 0$, contém algum ponto de A que seja distinto do ponto p . Isto é, para todo $\delta > 0$ temos

$$(I \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Definição. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função e p é um ponto de acumulação de A , dizemos que o limite de $f(x)$ é um número L , se x tende a p , se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que temos

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ se } 0 < |x - p| < \delta \text{ e } x \in A.$$

Notação.

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

Teorema 1 (Conservação do Sinal). Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \neq 0.$$

Se $L > 0$, então existe um intervalo $I = (p - \delta, p + \delta)$, de raio $\delta > 0$, tal que temos

$$0 < \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2} \text{ se } x \in I \cap A \text{ mas } x \neq p.$$

Observação. Temos, é claro, um resultado análogo se $L < 0$.

Prova.

Dado

$$\epsilon = \frac{L}{2} > 0,$$

pela definição de limite existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap A$, mas $x \neq p$, então

$$|f(x) - L| < \epsilon = \frac{L}{2}.$$

Logo, é fácil ver,

$$f(x) \in \left(\frac{L}{2}, \frac{3L}{2} \right) \clubsuit$$

Teorema 2 (Propriedades). *Seja p um ponto de acumulação de A e duas funções, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e também $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2,$$

então

(a) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) + g(x) = L_1 + L_2.$

(b) $\lim_{x \rightarrow p} cf(x) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = L_1L_2.$

(d) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0.$

Prova.

(a) Dado $\epsilon > 0$, consideremos $\epsilon/2$. Existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} \text{se } 0 < |x - p| < \delta_1 \text{ e } x \in A, & \text{então } |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2} \\ \text{se } 0 < |x - p| < \delta_2 \text{ e } x \in A, & \text{então } |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}. \end{cases}$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $0 < |x - p| < \delta$, com $x \in A$, então, pela desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (L_1 + L_2)| &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \leq \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(b) O caso $c = 0$ é óbvio.

Se $c \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ consideremos

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}.$$

Então, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta$, com $x \in A$, então temos

$$|f(x) - L_1| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$$

e portanto $|cf(x) - cL_1| < \epsilon$.

(c) Como

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2,$$

concluimos que existe um número $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta_1$, com $x \in A$, então temos $|g(x) - L_2| < 1$. Donde segue

$$|g(x)| = |g(x) - L_2 + L_2| \leq |g(x) - L_2| + |L_2| < 1 + |L_2|.$$

Sendo assim, obtemos

(1) se $0 < |x - p| < \delta_1$ (com $x \in A$), então $|g(x)| < 1 + |L_2|$.

Então, dado $\epsilon > 0$, e para a função g considerando o número

$$\frac{\epsilon}{2(|L_1| + 1)},$$

concluimos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

(2) se $0 < |x - p| < \delta_2$ (com $x \in A$) então $|g(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2(|L_1| + 1)}$.

Quanto à função f , para o valor de ϵ acima seja

$$\frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)}.$$

Então, existe $\delta_3 > 0$ tal que,

(3) se $0 < |x - p| < \delta_3$ (com $x \in A$) então $|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2(|L_2| + 1)}$.

Desta forma, escolhamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, que é estritamente positivo. Assim, se temos $0 < |x - p| < \delta$ e também temos $x \in A$, então as condições (1),(2) e (3) estão satisfeitas e encontramos

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - L_1L_2| &= |[f(x) - L_1]g(x) + [g(x) - L_2]L_1| \\ &\leq |[f(x) - L_1]g(x)| + |[g(x) - L_2]L_1| \\ &\leq |f(x) - L_1||g(x)| + |g(x) - L_2||L_1|. \end{aligned}$$

Mas,

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x) - L_1||g(x)| < \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}(1 + |L_2|) = \frac{\epsilon}{2} \\ |g(x) - L_2||L_1| \leq \frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}|L_1| < \frac{\epsilon}{2}. \end{array} \right.$$

Donde então segue

$$|(fg)(x) - L_1L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(d) Escrevendo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)},$$

pelo item (c) vemos que é suficiente mostrarmos

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}.$$

Notemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - p| < \delta_1$ então

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$$

e portanto

$$|L_2| = |L_2 - g(x)| + |g(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |g(x)|.$$

Donde então segue

$$|g(x)| > \frac{|L_2|}{2} \quad \text{ou, ainda,} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}.$$

Dado então $\epsilon > 0$ consideremos o número

$$\frac{\epsilon|L_2|^2}{2}.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2,$$

concluimos que existe $\delta_2 > 0$ tal que se

$$\text{se } 0 < |x - p| < \delta_2, \text{ com } x \in A, \text{ então } |g(x) - L_2| < \frac{\epsilon |L_2|^2}{2}.$$

Consequentemente, para $0 < |x - p| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, com $x \in A$, temos,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| &= \frac{|g(x) - L_2|}{|g(x)| |L_2|} \\ &= |g(x) - L_2| \frac{1}{|g(x)|} \frac{1}{|L_2|} \\ &< \frac{\epsilon |L_2|^2}{2} \frac{2}{|L_2|} \frac{1}{|L_2|} = \epsilon \clubsuit \end{aligned}$$

Corolário 3. Para todo polinômio $p = p(x)$ e para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0).$$

Prova.

Basta notarmos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

e que um polinômio é uma soma de parcelas da forma $a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, e $x^i = x \dots x$ é o produto do monômio x i -vezes e que, pelas propriedades acima temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a_i x^i = a_i x_0^i$$

e então, se $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ então segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_n x_0^n + \dots + a_1 x_0 + a_0 = p(x_0) \clubsuit \end{aligned}$$

Corolário 4. Para toda função racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ com } p \text{ e } q \text{ polinômios,}$$

se x_0 não é raiz de $q = q(x)$ então temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}.$$

Prova.

Segue do corolário 3 e do teorema 2(d) ♣

Teorema 5 (Do Confronto). Sejam f , g e h três funções, todas a valores reais e definidas no conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Suponhamos que p é um ponto de acumulação de A e que exista $\delta > 0$ tal que,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \text{se } x \in (p - \delta, p + \delta) \cap A \text{ mas } x \neq p.$$

Suponhamos também que

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L.$$

Então, segue

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L.$$

Prova.

Dado $\epsilon > 0$ existem, respectivamente, para g e h , $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que,

$$\begin{cases} \text{se } 0 < |x - p| < \delta_1 \text{ e } x \in A, & \text{então } |g(x) - L| < \epsilon \\ \text{se } 0 < |x - p| < \delta_2 \text{ e } x \in A, & \text{então } |h(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

Escolhamos então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Desta forma, se $0 < |x - p| < \delta$ e ainda $x \in A$, concluímos que $g(x)$ e também $h(x)$ pertencem ao intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$. Consequentemente, como $f(x)$ está entre $g(x)$ e $h(x)$, deduzimos que $f(x)$ também pertence ao mesmo intervalo ♣

Teorema 6 (Limite da Função Composta). *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \\ \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L, \\ \text{existe } r > 0 \text{ tal que } f(x) \neq y_0 \text{ se } x \in (x_0 - r, x_0 + r) \text{ mas } x \neq x_0. \end{array} \right.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L .$$

Prova.

Por hipótese, $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(1) \text{ se } 0 < |y - y_0| < \delta_1 \text{ e } y \in Y \text{ então } |g(y) - L| < \epsilon .$$

Por hipótese, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$. Então, para o δ_1 acima existe $\delta_2 > 0$ tal que,

$$(2) \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta_2 \text{ e } x \in X \text{ então } |f(x) - y_0| < \delta_1 .$$

Tomando-se $\delta = \min(\delta_2, r)$, por (2) e pela terceira condição nas hipóteses segue que

$$(3) \text{ se } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X, \text{ então } 0 < |f(x) - y_0| < \delta_1 .$$

Combinando (3) e (1), nesta ordem, temos então:

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in X, \text{ então } |g(f(x)) - L| < \epsilon .$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) \clubsuit$$

Definição. *Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $x_0 \in X$, com x_0 um ponto de acumulação de X , se,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

Observação. Se $x_0 \in X$ não é ponto de acumulação de X , então x_0 é dito um ponto isolado de X . Toda função é declarada contínua em seus pontos isolados.

Proposição 7. *Os polinômios e as funções racionais são funções contínuas em seu domínio.*

Prova.

Segue da definição de continuidade e dos corolários 3 e 4 ♣

Teorema 8. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tais que,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ e } g \text{ é contínua em } x_0.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0).$$

Prova.

Como g é contínua em x_0 , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que,

$$|y - y_0| < \delta_1 \implies |g(y) - g(y_0)| < \epsilon .$$

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$, para o δ_1 acima existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \delta_1 .$$

Combinando as duas afirmações acima temos,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \clubsuit$$

Corolário 9. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f é contínua em x_0 e g é contínua em $y_0 = f(x_0)$. Então, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é contínua em x_0 .*

Prova.

Segue imediatamente do teorema 8 ♣

Corolário 10. *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em $p \in X$ então, $f + g$, $f \cdot g$ e cf ($c \in \mathbb{R}$), são contínuas em p . Ainda mais, se $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$, definida no conjunto em que g não se anula, também é contínua em p .*

Prova.

Consequência imediata das propriedades dos limites ♣

APLICAÇÕES.

1. Primeiro Limite Fundamental.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1.$$

Verificação. Em aula.

2. Terceiro Limite Fundamental.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Verificação. Em aula.

3. Segundo Limite fundamental.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Verificação.

Mudando para a variável $h = e^x - 1$, com $h \rightarrow 0$, obtemos $e^x = h + 1$, $x = \ln(h + 1)$ e,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{h}{\ln(h + 1)} = \frac{1}{\frac{1}{h} \ln(h + 1)} = \frac{1}{\ln(h + 1)^{\frac{1}{h}}}.$$

Para $y = \frac{1}{h}$ temos que $y \rightarrow \pm\infty$ segundo h tende a zero pela direita ou esquerda e temos

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}.$$

Mas, por 2 (terceiro limite fundamental) segue

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Ainda, **assumindo** que a função exponencial é contínua (e portanto, sua inversa, a função logaritmo também), obtemos

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ln e = 1.$$

Assim, encontramos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = 1.$$

4. A função $f(x) = \sin x$, onde $x \in \mathbb{R}$, é contínua.

Verificação. Pelas fórmulas de prostaferese temos

$$\sin x - \sin p = 2 \sin \frac{x-p}{2} \cos \frac{x+p}{2}.$$

Notemos que $|\cos(x)| \leq 1$, para todo x . Já mostramos na prova do primeiro limite fundamental que $|\sin x| \leq |x|$, para todo x . Segue então que

$$0 \leq |\sin x - \sin p| = 2 \left| \sin \frac{x-p}{2} \cos \frac{x+p}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-p}{2} \right| = |x-p|.$$

Logo, pelo teorema do confronto temos

$$\lim_{x \rightarrow p} |\sin x - \sin p| = 0$$

e, portanto

$$\lim_{x \rightarrow p} \sin x = \sin p.$$

5. A função $f(x) = \cos x$, onde $x \in \mathbb{R}$, é contínua.

Verificação. Pelas fórmulas de prostaferese temos

$$\cos x - \cos p = -2 \sin \left(\frac{x+p}{2} \right) \sin \left(\frac{x-p}{2} \right).$$

Assim, como $|\sin x| \leq 1$, para todo x , e ainda, $|\sin x| \leq |x|$, para todo x , segue que

$$0 \leq |\cos x - \cos p| \leq 2 \left| \sin \frac{x+p}{2} \sin \frac{x-p}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-p|}{2} = |x-p|.$$

Logo, analogamente ao exemplo 4,

$$\lim_{x \rightarrow p} \cos x = \cos p.$$

6. Se $a > 0$, a função $f(x) = a^x$ é contínua.

Verificação.

Temos, $f(x) = a^x = e^{x \ln a} = (g \circ h)(x)$, como $h(x) = x \ln a$ e $g(y) = e^y$. Portanto, como as funções g e h são ambas contínuas, pelo corolário 9 segue que $f = g \circ h$ é também contínua.

7. A função $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde $x \in [0, +\infty)$, é contínua.

Verificação. Mostremos que

$$\lim_{x \rightarrow p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}.$$

Suponhamos, inicialmente, $p > 0$.

Substituindo na identidade

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \dots + a^{n-1-i}b^i + \dots + b^{n-1}),$$

os valores $a = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ e $b = \sqrt[n]{p} = p^{\frac{1}{n}}$, encontramos

$$x - p = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}) \left[\sum_{j=0}^{n-1} x^{\frac{n-1-j}{n}} p^{\frac{j}{n}} \right].$$

Se $|x - p| < \frac{p}{2}$ então temos $x > \frac{p}{2}$ e

$$\sum_{j=0}^{n-1} x^{\frac{n-1-j}{n}} p^{\frac{j}{n}} > n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Donde segue

$$|x - p| > |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}| n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

e portanto

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}| < \frac{|x - p|}{n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}}.$$

A seguir, dado $\epsilon > 0$ consideremos o número

$$\delta = \min \left\{ \frac{p}{2}, \epsilon n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right\}.$$

Se $|x - p| < \delta$ então temos

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}| < \frac{|x - p|}{n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}} < \frac{\delta}{n \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{n-1}{n}}} \leq \epsilon.$$

Donde segue

$$\lim_{x \rightarrow p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}, \text{ se } p > 0.$$

Se $p = 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta = \epsilon^n$. Se $0 \leq x < \delta$ temos

$$0 \leq \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\delta} = \epsilon \text{ e, assim, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

8. A função

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}}, \text{ onde } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{mdc}(p, q) = 1,$$

é contínua no intervalo aberto $(0, +\infty)$.

Verificação.

Temos

$$f(x) = (g \circ h)(x), \text{ com } h(x) = \sqrt[q]{x} \text{ e } g(y) = y^p,$$

que são contínuas em $(0, +\infty)$, pelo exemplo 7 e pela Proposição 7, respectivamente. Logo, como composição de funções contínuas é também uma função contínua, f é contínua.

9. As funções trigonométricas

$$\tan x, \cot x, \sec x \text{ e } \operatorname{cosec} x$$

são contínuas em seus domínios.

Verificação.

Consequência imediata dos exemplos 4 e 5 e do corolário 10.